

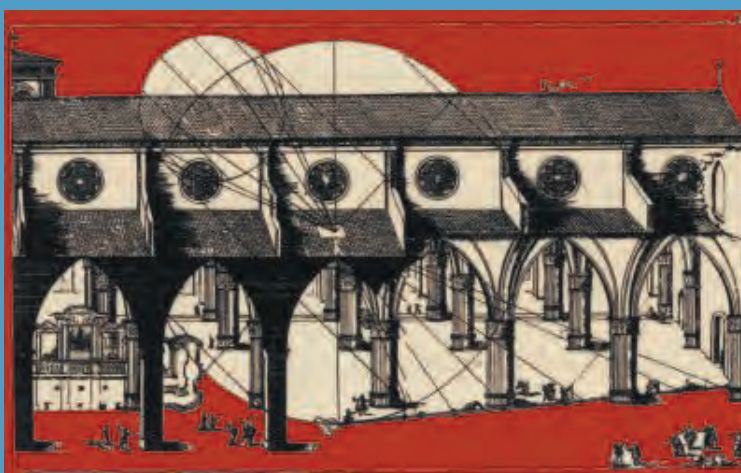
L'ALGEBRITZACIÓ DE LES MATEMÀTIQUES. PIETRO MENGOLI (1625-1686)

M. Rosa Massa Esteve



SOCIETAT CATALANA D'HISTÒRIA
DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA
Filial de l'Institut d'Estudis Catalans

BARCELONA, 2006



Col·loquis d'Història de la Ciència i de la Tècnica **5**



SOCIETAT CATALANA D'HISTÒRIA
DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA
Filial de l'Institut d'Estudis Catalans

L'algebrització de les matemàtiques. Pietro Mengoli (1625-1686)

M. Rosa Massa Esteve



SOCIETAT CATALANA D'HISTÒRIA
DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA
Filial de l'Institut d'Estudis Catalans

BARCELONA, 2006

Massa Esteve, Ma. Rosa

L'Algebrització de les matemàtiques : Pietro Mengoli (1625-1686). — (Col·loquis d'història de la ciència i de la tècnica ; 5)
Bibliografia

ISBN 84-7283-834-X

I. Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica II. Títol

III. Col·lecció: Col·loquis d'història de la ciència i de la tècnica ; 5

1. Mengoli, Pietro, 1625-1686 2. Matemàtica — Història — S. XVII 3. Àlgebra — Història — S. XVII

51Mengoli, Pietro

Disseny gràfic: Maria Casassas

Il·lustració de la coberta: Església de Sant Petroni de Bolonya (Itàlia)

© M. Rosa Massa Esteve

Editat per la Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica,

filial de l'Institut d'Estudis Catalans

Carrer del Carme, 47. 08001 Barcelona

Primera edició: juliol de 2006

Tiratge: 400 exemplars

Text revisat lingüísticament per l'Oficina de Correcció i Assessorament Lingüístics de l'IEC

Compost per Víctor Igual, SL

Carrer del Peu de la Creu, 5. 08001 Barcelona

Imprès a ALTÉS arts gràfiques, SL

Carrer de Cobalt, 160. 08907 L'Hospitalet de Llobregat

ISBN: 84-7283-834-X

Dipòsit Legal: B. 22461-2006

Índex

Presentació	7
L'algebrització de les matemàtiques. Pietro Mengoli (1625-1686)	
1. Introducció	9
2. L'algebrització de les matemàtiques	9
3. La imatge intel·lectual de Pietro Mengoli	13
4. Llenguatge algebraic de Mengoli	15
5. Quadratures algebraiques de Mengoli	20
6. Conclusions	26
Bibliografia	29
L'autora	33

Presentació

Aquest cinquè número de la sèrie «Col·loquis d'Història de la Ciència i de la Tècnica» es publica deu anys després de l'aparició del primer número, escrit per Antoni Quintana i Marí, dedicat a glossar l'aportació dels primers aeronautes al coneixement de la química de l'aire a finals del segle XVIII. Durant tot aquest temps, la Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica (SCHCT) ha procurat recollir en aquestes publicacions alguns dels col·loquis que any darrere any s'han ofert en cada curs acadèmic, i la voluntat de la nostra Societat seria la de veure com augmenta el ritme d'aquestes publicacions. Seria, sens dubte, un bon símptoma d'una bona salut institucional.

La publicació d'aquest darrer número és, per tant, un excel·lent motiu per celebrar aquest aniversari. L'article que podeu llegir a continuació és fruit del col·loqui que vam fer el 22 de febrer de 2002, i que la seva autora, Maria Rosa Massa, dedicà a la figura del matemàtic Pietro Mengoli (1625-1686) i a la seva contribució a l'algebrització de les matemàtiques. Tal com ens indica l'autora, l'evolució del pensament geomètric envers l'algebraic va seguir un itinerari lent i gradual, en el qual l'ús d'expressions algebraiques per a l'estudi de figures geomètriques va acabar sent una de les aportacions més innovadores de Mengoli. No obstant això, com ha passat sovint en la història de la ciència, les dificultats per entendre el seu discurs van acabar sent un obstacle per comprendre el seu mètode.

No voldria deixar passar aquesta presentació sense recordar que Maria Rosa Massa ha compartit durant molts anys la seva feina com a professora de matemàtiques a l'ensenyament secundari amb la seva dedicació —i també devoció— a la història de la ciència i a les seves relacions amb l'ensenyament. En publicar aquest col·loqui, no tan sols celebrem un aniversari, sinó que també fem un reconeixement a l'esforç i a la generositat de tots aquells que, com la Maria Rosa, troben el temps i les ganes per compaginar ambdós mons.

Pere Grapí i Vilumara

L'algebrització de les matemàtiques. Pietro Mengoli (1625-1686)

M. Rosa Massa Esteve

1. Introducció

En el segle XVII, les recerques sobre càlcul d'àrees van rebre un gran impuls gràcies a la utilització de procediments algebraics. Pietro Mengoli, bolonyès, probablement el deixeble més original de Bonaventura Cavalieri (1598-1647),¹ va ser un dels matemàtics que van desenvolupar aquests procediments. Àlgebra i geometria estan estretament relacionades en els seus treballs, especialment en el seu llibre *Geometriae speciosae elementa* (Bolonya, 1659).

L'objectiu d'aquest treball és exposar part dels estudis de l'autora sobre les matemàtiques a l'obra de Mengoli. En particular, s'analitzarà la interrelació entre àlgebra i geometria en la seva obra i es mostrarà com la utilització de procediments algebraics li va permetre trobar un nou camí per fer quadratures de les corbes definides per equacions que avui escriuríem com $y = K \cdot x^m \cdot (t - x)^n$. A l'apartat 2, es tractarà de l'algebrització de les matemàtiques que es va produir a la seva època; a l'apartat 3, es presentarà un apropament a la figura de Pietro Mengoli com a científic i, finalment, als apartats 4 i 5, s'analitzarà l'àlgebra de Mengoli i el seu ús en les quadratures.

2. L'algebrització de les matemàtiques

Dos dels avenços més importants de les matemàtiques durant el segle XVII van ser la creació de la geometria analítica i el desenvolupament del càlcul infinitesimal. Ambdós es van assolir gràcies a les connexions entre les expressions algebraiques i les cor-

bes, en utilitzar procediments algebraics per resoldre problemes geomètrics.

De fet, les relacions entre l'àlgebra i la geometria havien estat molt diferents abans del segle XVII. Podríem distingir dos grans blocs: el primer, al començament, amb l'àlgebra retòrica i sincopada, que resolvia essencialment problemes d'aritmètica mercantil (on no hi havia gairebé cap connexió entre l'àlgebra i la geometria i, si n'hi havia, es limitava a justificar, algunes vegades, els resultats), i un segon bloc, al Renaixement, quan ja es van intentar les primeres classificacions d'equacions, segons el grau i segons el signe, i es van presentar les solucions elaborant diagrames i construccions geomètriques que les verificuessin. D'entre els matemàtics d'aquest segon bloc, podem citar Luca Pacioli (1445-1514), Gerolamo Cardano (1501-1576) i Raffaele Bombelli (1526-1573), algebristes del *cinquecento*, que intentaven provar les solucions de les equacions algebraiques obtingudes per via purament abacoalgebraica mitjançant figures geomètriques.

A tall d'exemple, observeu Bombelli (vegeu la figura 1), que intentava generalitzar l'algorisme de l'equació de segon grau i donava cada vegada una regla i una construcció geomètrica original de la solució. L'*Algebra* (Bolonya, 1572) de Bombelli consta de cinc llibres: en els tres primers, resolvia algebraicament equacions de segon grau i alguns casos particulars de tercer i quart grau, i en els dos últims, publicats més tard per Bortolotti (1929), presentava aplicacions dels mètodes geomètrics a l'àlgebra (llibre quart) i aplicacions dels mètodes algebraics a les solucions geomètriques (llibre cinquè). Bombelli, en

1. Bonaventura Cavalieri, jesuat italià, va ser un dels primers matemàtics a desenvolupar un nou mètode de qua-

dratures anomenat *mètode dels indivisibles*. Va ser professor a la Universitat de Bolonya on va crear escola.

el llibre tercer, resolvia numèricament l'equació de segon grau amb l'algorisme tradicional; tot seguit, enuncïava una regla general que valgués per a tots els casos similars, independentment del valor numèric dels coeficients; després, feia un exemple numèric d'aplicació de la regla i, en el llibre quart, presentava una construcció geomètrica de la solució amb una referència explícita al problema que havia resolt en el llibre tercer. Vegeu-ne un exemple.

Llibre III. Problema XLIX. Feu de 10 dues parts tals que multiplicades l'una per l'altra faci 16. Posem que una de les parts sigui $1^{\frac{1}{2}}[x]$, l'altra serà $10 - 1^{\frac{1}{2}}[10 - x]$, que multiplicades l'una per l'altra facin $10^{\frac{1}{2}} - 1^{\frac{1}{2}}[10x - x^2]$, i això és igual a 16, que, si li traiem el menys, es tindrà $1^{\frac{1}{2}} + 16$ igual a $10^{\frac{1}{2}}[x^2 + 16 = 10x]$. Trobeu la meitat de la quantitat incògnita (*tanti*),² que és $5[(b/2)]$, i es quadra, fa 25 i se li resta 16, queda 9 $[(b/2)^2 - c]$, que el seu costat és $3[(b/2)^2 - c]^{1/2}$, el qual es treu del 5, meitat de les incògnites, queda 2, i 2 val la incògnita (*tanto*), i aquesta és una de les parts $[(b/2) - ((b/2)^2 - c)^{1/2}]$; l'altra serà 8 i de similar demanda neix la regla següent.³

Vegeu, a continuació, com feia la construcció geomètrica d'aquest mateix exemple. Bombelli exposava:

[88] Vull dividir la línia *.a.b.* en dues parts tals que facin un paralelogram d'àrea igual a la d'un quadrat *.l.i.k.*

Si aquesta superfície no és un quadrat, es reduirà a un quadrat, com s'ha demostrat, però si és un quadrat, divideix la línia *.a.b.* en dues parts iguals en el punt *.c.*, i sobre la *.a.c.* es traça el semicercle *.a.d.c.*, en el qual es traça la recta *.a.d.* igual al costat *.i.k.*, i des del punt *.d.* es traça la *.c.d.*, i feu *.c.e.* igual a la *.c.d.*; dic que el punt *.e.* serà el terme, que divideix la línia en les dues parts demanades, com es pot provar amb nombres.⁴

Aquest enunciat planteja l'equació $x \cdot (b - x) = c$, essent b = línia *ab*, i c = àrea quadrat *ilk*, o sigui que $ik = c^{1/2}$. Bombelli dividia la línia *ab* en dues parts iguals ($ac = cb$), i obtenia $b/2$, prenia aquest valor

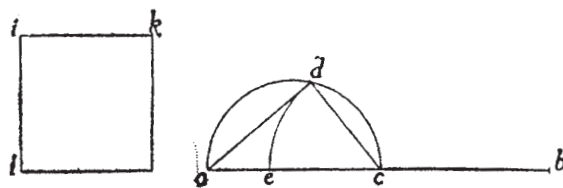


FIGURA 1. Figures de Bombelli.

com a diàmetre i dibuixava un semicercle. Traçava la corda $c^{1/2}$ des d'un extrem del diàmetre (*a*) i completava el triangle rectangle dibuixant la recta *cd* fins a l'altre extrem. Aplicava el teorema de Pitàgores i llavors el catet (segment) $cd = [(b/2)^2 - c]^{1/2}$. A continuació, el projectava sobre *ab* i obtenia el punt *e*, i assenyalava que les solucions serien els segments $ae = ac - cb$ i $eb = cb + cd$. Cal remarcar que Bombelli no plantejava l'equació, emprava llenguatge retòric i comprovava la solució amb un exemple numèric.⁵

En aquestes primeres àlgebres renaixentistes ja es pot apreciar un procés inicial de maduració dels procediments algebràics, a fi d'esdevenir eines per a la resolució de problemes. Un dels punts més significatius en el desenvolupament històric de l'àlgebra va ser l'aparició en 1591 de l'obra *In artem analyticem isagoge* de François Viète (1540-1603), en la qual es va fer palès l'avantatge d'utilitzar símbols dins la matemàtica, no únicament per representar les incògnites, sinó també per a les quantitats conegudes, la qual cosa permetia treballar les equacions en forma general.⁶ Viète solucionava les equacions geomètricament emprant la teoria de proporcions euclidiana, igualava les equacions algebràiques amb les proporcions (mitjançant el producte de mitjos i extrems d'una proporció), i introduïa així un nou camí per resoldre les equacions.

A principis del segle XVII, i gràcies a la difusió de l'obra de Viète, un bon nombre de matemàtics començaven a adonar-se que els mètodes algebràics eren una eina molt útil per resoldre problemes geomètrics. Entre ells podem citar Pierre de Fermat (1601-1665),

2. Cardano anomena la incògnita *cosa* i Bombelli l'anomena *tanto*.

3. «Problema XLIX. Faccisi di 10 due parti tali che moltiplicate l'una via l'altra faccino 16. Ponghisi che l'una di dette parti sia $1^{\frac{1}{2}}$, l'altra sarà $10 - 1^{\frac{1}{2}}$, che moltiplicate l'una via l'altra fanno $10^{\frac{1}{2}} - 1^{\frac{1}{2}}$ e questo è eguale a 16, che levato il meno si haverà $1^{\frac{1}{2}} + 16$ eguale a $10^{\frac{1}{2}}$. Piglisi la metà delli Tanti, ch'è 5, e si quadri, fa 25 e se ne cavi 16, resta 9, che il suo lato è 3, il quale si cava di 5, metà delli Tanti, resta 2 e 2 vale il Tanto e questa è una delle parti; l'altra sarà 8 e da simili domande nasce la seguente regola» (Bombelli, 1966, p. 340).

4. «[88] Voglio dividere la linea *.a.b.* in due tal parti delle quali fattone un parallelogrammo sia pari alla superfi-

cie *.l.i.k.* Se detta superficie non sarà quadrato si ridurrà a quadrato, come si è mostrato, ma dato che sia quadrato, dividasi la linea *.a.b.* in due parti pari in punto *.c.*, et sopra la *.a.c.* si faccia il semicirculo *.a.d.c.* nel quale tirasi la retta *.a.d.* pari al lato *.i.k.* et dal punto *.d.* tirasi la *.c.d.* et facciasi *.c.e.* pari alla *.c.d.*; dico il punto *.e.* essere il termine, che divide la linea nelle due parti addimandate; come si puo provare col numero» (Bombelli, 1966, p. 572).

5. L'exemple numèric de la construcció geomètrica no correspon a l'equació de segon grau del llibre tercer. En aquest cas, pren $ab = 12$ i l'àrea igual a 24. Vegeu Bombelli (1966, p. 572-573).

6. Per a més informació, vegeu Viète (1970, p. 12), Giusti (1992) i Freguglia (1999).

tot i que la figura més influent en la investigació de la relació entre l'àlgebra i la geometria va ser René Descartes (1596-1650), autor de la coneguda obra *La géométrie*, que figurava com un apèndix en el seu *Discours de la méthode* (Leiden, 1637). Aquest treball de Descartes va suposar un punt de partida per contemplar la geometria des d'una altra perspectiva.⁷ A partir de la seva obra, i durant un segle aproximadament, es va dur a terme el procés d'algebrització de les matemàtiques:⁸ un període en el qual es va passar d'una manera de pensar les matemàtiques gairebé exclusivament geomètrica a un pensament matemàtic més algebraic.⁹ Aquesta evolució va ser lenta i desigual. Alguns autors van adoptar les tècniques algebraiques en la seva obra i, a la vegada, van intentar justificar-les o transformar-les d'acord amb la matemàtica clàssica. D'altres, malgrat conèixer l'existència d'aquests procediments, els consideraven aliens al pensament matemàtic i, fins i tot, els refusaven. Finalment, uns quants acceptaven aquesta nova manera de pensar com un complement més per al desenvolupament de les seves tècniques matemàtiques.¹⁰ En una època en la qual s'estava recuperant el pensament clàssic a través de les traduccions dels textos grecs, s'introduïren a la vegada en el pensament matemàtic unes tècniques algebraiques molt fèrtils amb un significat que, a vegades, s'oposava a la comprensió de les tècniques clàssiques.

També a finals del segle XVI, a causa d'aquestes traduccions llatines dels geòmetres grecs, s'havia produït una revifalla d'investigacions geomètriques sobre temes arquimedianos, en particular sobre el càlcul d'àrees i volums de figures geomètriques. Des de l'any 1600 fins a l'any 1680, els procediments emprats per diferents matemàtics van originar diverses versions d'infinitesimals i indivisibles que es podrien agrupar en tres grans línies, segons que estiguessin relacionades amb el mètode d'exhaustió, amb el mètode dels indivisibles i amb els mètodes algebraics que començaven a emprar-se.

La tècnica dels antics, que avui s'anomena *mètode d'exhaustió*, va ser creada per Èudox i, posteriorment, Euclides i Arquimedes la van emprar en una gran varietat de problemes, a fi de determinar àrees de figures curvilínies, volums, superfícies i arcs. Aques-

ta tècnica, tot i ser tan rigorosa com d'altres, era, al mateix temps, extremadament laboriosa i no deixava gaire lloc a la intuïció.

El mètode es basa en una sèrie de nocions que són indispensables per poder desenvolupar el procés. Aquestes nocions poden ser explicades com segueix (Baron, 1987, p. 35):

1. Qualsevol quantitat finita, tanmateix petita, pot arribar a ser tan gran com vulguem multiplicant-la per un nombre suficientment gran; o bé, donades dues magnituds desiguals a i b ($b < a$), llavors existeix
 - a) un nombre n tal que $nb > a$ (Euclides, llibre V, def. 4),
 - b) un nombre n tal que $n(a - b) > c$, on c és alguna magnitud del mateix tipus (l'axioma d'Arquimedes, *Sobre l'esfera i el cilindre*, llibre I).
2. Qualsevol quantitat finita pot arribar a ser tan petita com nosaltres vulguem per substracció repetida d'una quantitat més gran o igual a la seva meitat; o bé, donades dues quantitats desiguals a i b ($b < a$), llavors existeix un nombre n , tal que $(1 - p)^n a < b$, on $p \geq 1/2$ (Euclides, X.1).

El mètode consistia a fer una doble «reductio ad absurdum». O sigui, per demostrar que $A = B$ s'havia de provar la impossibilitat de $A > B$ i de $A < B$. Així, Arquimedes va obtenir les quadratures amb l'ajut de mètodes mecànics i va demostrar la validesa dels resultats obtinguts mitjançant proves indirectes. Mesurava les figures curvilínies exhauint-les mitjançant figures poligonals inscrites i circumscrites.

El procés consistia en l'establiment, a través de construccions geomètriques, d'una seqüència ascendent monòtona I_n i una seqüència descendent C_n , entre les quals hi ha la magnitud B de la qual hem de determinar el valor. Els termes I_n i C_n constitueixen perímetres, àrees de superfícies o volums de figures inscrites i circumscrites, respectivament, i la relació:

$$I_1 < I_2 < I_3 < \dots < I_n < B < C_n < \dots < C_3 < C_2 < C_1$$

es pot establir a partir d'una sèrie de lemes geomètrics coneguts. Utilitzant les nocions 1 i 2, i la construcció particular adoptada per I_n i C_n , es demostra

7. La interpretació del programa de Descartes ha donat i segueix suscitant encara avui opinions enfrontades. D'una banda, Bos, Boyer i Lenoir estableixen que, per Descartes, l'àlgebra era simplement una eina per treballar: «Per Descartes, l'equació d'una corba era primerament una eina i no un mitjà de definició o representació.» (Bos, 1981, p. 323). A més, l'equació d'una corba era una eina que li permetia la classificació de les corbes. Per aquests historiadors, el propòsit de Descartes en escriure *La géométrie* era trobar un mètode per resoldre problemes geomètrics, com era usual en aquell temps, i l'equació no era l'últim pas en el camí cap a la solució. D'altra banda, Giusti i d'altres afirmen que per

Descartes la corba era l'equació. Giusti emfatitza el component algebraic de *La géométrie* com a clau en el programa de Descartes. Entre els molts estudis sobre aquest programa, són particularment interessants: Giusti (1987, p. 409-432), Mancosu (1996, p. 62-84) i Bos (2001, p. 225-412).

8. Sobre aquest procés d'algebrització, es pot consultar Mancosu (1996, p. 84-86), Pycior (1997, p. 135-166), Bos (1998, p. 291-317) i Panza (2005, p. 1-30).

9. Una anàlisi detallada d'aquest canvi de pensament es pot trobar a Mahoney (1980, p. 141-155).

10. Sobre aquest tema, es pot consultar Høyrup (1996, p. 3-4) i Massa (2001, p. 708-710).

que, per a algun n , la diferència $(C_n - I_n)$ pot arribar a ser més petita que qualsevol magnitud donada, o que la raó C_n / I_n pot arribar a ser més petita que la raó de la més gran a la més petita de dues magnituds donades qualsevols.

El càlcul consisteix en el fet que, trobada una magnitud A , que per a tots els valors de n està entre I_n i C_n , aquesta magnitud A ha de ser igual a B . Per provar-ho, es demostra la impossibilitat que $A < B$ i $A > B$. Tanmateix, en el mètode d'exhaustió cada proposició es feia de bell nou i no s'utilitzaven resultats d'altres proposicions. A més, no es donaven ni s'intentaven donar regles per fer nous càlculs.

Ja a principis del segle XVII, Cavalieri va ser un dels primers a desenvolupar un nou mètode de quadratures, anomenat *mètode dels indivisibles*, que evitès les proves indirectes i que, a més a més, pogués ser emprat de la mateixa manera en tots els casos. El mètode dels indivisibles va ser difós bàsicament a través de dos dels seus llibres: *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (Bologna, 1635) i *Exercitationes geometricae sex* (Bologna, 1647). En aquesta última obra és on trobem la demostració de les quadratures de les infinites paràboles (que avui s'escriuria com $y = x^n$) per a qualsevol n enter positiu.¹¹ La seva principal virtut era la fertilitat, ja que resolva tant problemes clàssics com nous, i es reobtenien resultats que coincidien amb els ja coneguts. El mètode es basava en una mena d'isomorfisme: la proporcionalitat entre dues col·leccions de línies o de plans podia ser transferida a les figures en les quals s'havien determinat aquestes línies o plans sense definir clarament si aquestes línies «componien» la figura o si els plans «componien» el sòlid. Aquesta transferència de raó o proporció entre «totes les línies» de dues figures a una raó o proporció entre les figures li permetia trobar les àrees. Durant molt temps, el mètode dels indivisibles va ser discutit i criticat a causa de la poca solidesa dels seus fonaments.

L'altra via per demostrar les quadratures d'aquestes infinites paràboles eren els procediments algebràics. Els matemàtics intentaven, entre altres coses, calcular el resultat que avui s'escriuria com:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1^p + \dots + t^p}{t^{p+1}} = \frac{1}{p+1} \text{ quan } t \text{ tendeix a infinit.}$$

Aquest resultat els permetia deduir les quadratures de les paràboles $y = x^n$ per a qualsevol n enter posi-

tiu. El procediment consistia a enunciar una regla aritmètica algebràica per a la suma finita de potències, comprovar-la per a dos o tres casos i deduir el valor de la suma quan el nombre de sumands tendia a infinit.

En aquesta línia, podem citar Gilles Personne de Roberval (1602-1675), que, el 1636, en una carta dirigida a Fermat, enuncitava la regla per trobar la suma finita de potències i explicava que l'emprava per al càlcul de quadratures.¹²

Així mateix, Fermat especificava en una carta a Cavalieri, abans del 1644, que havia quadrat les paràboles, i li exposava la regla i un exemple. El mateix Fermat, el 1657, va demostrar les quadratures per a n racional positiu. D'altra banda, John Wallis (1616-1703) també va demostrar aquestes mateixes quadratures en la seva *Arithmetica infinitorum* (1655) emprant la suma de potències.

Tanmateix, el que faltava trobar era un mètode vàlid en general que fos aplicable sense cap modificació en cada cas particular. En un intent per trobar un mètode més general i més sòlidament fonamentat per calcular quadratures, Pietro Mengoli (1625-1686), en la seva obra *Geometriae speciosae elementa* (1659), va utilitzar l'àlgebra per resoldre problemes de quadratures. Ja al començament d'aquest llibre expressava que la seva geometria era una combinació de la de Cavalieri i la d'Arquimedes, i que l'obtenia emprant les eines que l'àlgebra especiosa de Viète li oferia:

Ambdues geometries, l'antiga d'Arquimedes i la nova dels indivisibles de Bonaventura Cavalieri (preceptor meu), així com també l'àlgebra de Viète, han estat tractades amb bastant encert per persones cultes; d'elles, ni confusament ni com si fos una barreja, sinó per una perfecta conjunció, en resulta una de nova, l'espècie pròpia del nostre treball, que no podrà desagradar a ningú.¹³

En el seu mètode, Mengoli va fer confluïr d'una manera singular aquestes tres línies: el mètode d'Arquimedes, els indivisibles de Cavalieri i l'àlgebra de Viète. Tot i que les quadratures que va investigar les coneixia (les havia obtingut amb el mètode dels indivisibles), Mengoli pretenia obtenir-ne una de nova: la quadratura del cercle, un objectiu que va assolir posteriorment amb el seu mètode algebràic en una obra posterior, titulada *Circolo* (1672).

11. Sobre els indivisibles de Cavalieri, vegeu: Giusti (1980), Andersen (1984/1985), Massa (1994) i Malet (1996).

12. Fermat no va publicar mentre vivia i els seus treballs circulaven en forma de cartes o manuscrits. Sobre Fermat, es pot consultar Fermat (1891-1922, p. 65-71 i p. 286-292) i Mahoney (1973, p. 229-232). Tanmateix, parts del seu treball estan explicades en altres publicacions. Per exemple, l'obra d'Hérigone conté una exposició del mètode de tangents de Fermat: es pot consultar Hérigone (1644,

p. 59-69) i Cifoletti (1990, p. 129). Sobre Roberval, es pot consultar Auger (1962, p. 19-20) i Walker (1986, p. 171-173), i sobre Wallis, Wallis (1972, p. 382).

13. «Ipsae satis amabiles litterarum cultoribus visae sunt utraque geometria, archimedis antiqua, & indivisibilium nova Bonaventura Cavalierij praeceptoris mei, necnon & Viettae algebra: quarum non ex confusione, aut mixione, sed coniunctis perfectionibus, nova quaedam, & propria laboris nostri species, nemini poterit displicere» (Mengoli, 1659, p. 2-3).

3. La imatge intel·lectual de Pietro Mengoli¹⁴

El nom de *Pietro Mengoli* apareix en el registre de la Universitat de Bolonya en el període 1648-1686, on havia substituït el seu mestre Cavalieri en la Càtedra de Mecànica (vegeu la figura 2). Es va graduar en filosofia el 1650 i tres anys més tard en lleis civils i canòniques. En aquest primer període, va escriure tres obres de matemàtica pura: *Novae quadraturae arithmeticae seu de additione fractionum* (Bolonya, 1650), *Via regia ad mathematicas per arithmetica, algebram speciosam et planimetriam ornata, maiestati serenissimae D. Christinae reginae suecorum* (Bolonya, 1655) i *Geometriae speciosae elementa* (Bolonya, 1659). El 1660 va ser ordenat sacerdot i, des d'aquest moment i fins a la seva mort, va ser prior de l'església de Santa Maria Magdalena de Bolonya. Encara que entre el 1660 i el 1669 no va publicar res, a partir del 1670 van tornar a aparèixer obres seves: *Refrattioni e parallase solare* (Bolonya, 1670), *Speculationi di musica* (Bolonya, 1670) i *Circolo* (Bolonya, 1672). Aquestes obres reflecteixen el nou propòsit de Mengoli d'investigar, no únicament sobre matemàtiques pures, sinó també sobre matemàtiques mixtes, com ara l'astronomia, la cronologia i la música. A més, la seva investigació estava clarament dirigida a justificar els escrits bíblics i a fer apologia de la fe catòlica. Mengoli va continuar en aquesta línia, publicant dues obres sobre cosmologia i cronologia bíblica: *Anno* (Bolonya, 1673) i *Mese* (Bolonya, 1681), i les *Arithmetica rationalis* (Bolonya, 1674) i *Arithmetica realis* (Bolonya, 1675), sobre lògica i metafísica.

Així doncs, podem considerar la vida científica de Mengoli dividida en dues parts, fins a l'any 1660 i de l'any 1670 en endavant, quan Mengoli, a part de diversificar el camp de les seves investigacions, començà a deixar de ser citat en els cercles científics i quedà cada vegada més aïllat dels seus contemporanis.

La *Novae quadraturae arithmeticae* (1650) apareix citada en moltes cartes dels científics europeus i provocà una discussió entre Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) i Henry Oldenburg (1615-1677) so-



FIGURA 2. Pietro Mengoli.

bre les sèries que va sumar Mengoli.¹⁵ Robinet, en situar Leibniz a Bolonya, identifica Mengoli com una de les fonts crucials per a la invenció leibniziana en matemàtiques.¹⁶ Sembla que Leibniz va llegir molt acuradament l'obra de Mengoli i segurament va utilitzar els seus resultats, però d'això no hi ha més indicis que la correspondència entre Leibniz i Oldenburg, on es parla sobre els resultats de les sèries, el problema d'Ozanam i les explicacions de Robinet.¹⁷

En la correspondència es troba una primera carta on Leibniz s'interessava per l'obra de Mengoli. Oldenburg li va contestar reenviant-li una carta de John Collins (1624-1683), on explicava que Mengoli sabia sumar sèries infinites que tenien com a denominadors nombres figurats, però, en canvi, no sabia sumar els quadrats.¹⁸ També li proposava a Leibniz que els ajudés a entendre la *Via regia*, que era la segona obra matemàtica de Mengoli. Leibniz va contestar dient que no creia que Mengoli hagués sumat la sèrie infi-

14. Trobareu més informació biogràfica de Pietro Mengoli a Natucci (1970, p. 303), Baroncini i Cavazza (1986, p. 1) i Massa (1998, p. 9-26).

15. Oldenburg, secretari de la Royal Society de Londres, procurava mantenir-se en contacte amb els científics d'altres països i obtenir tots els llibres que sortien publicats.

16. Segons Robinet (1988, p. 329), Leibniz coneixia Mengoli a través de Jacques Ozanam (1640-1717) i del problema que aquest li va proposar. Existeix un comentari manuscrit de Leibniz al *Theorema arithmeticum* del 1674 de Mengoli. En aquest primer escrit, Mengoli no va saber solucionar el problema d'Ozanam, però ho va fer més tard. Vegeu Nastasi-Scimone (1994, p. 10-27) i Leibniz (1990, p. 37, 39, 40 i 75). Sembla que durant uns quants anys,

Leibniz va intentar trobar una solució general al problema que el 1674 havia proposat Ozanam a Mengoli i a altres matemàtics europeus, entre ells al mateix Leibniz. Aquest fet de publicar la solució errònia el va molestar, perquè es va sentir perseguit i, a més, li va fer perdre prestigi entre els europeus. En una carta, del 2 de juny de 1674, a Alessandro Marchetti (1632-1714), matemàtic, amic i corresponent de Mengoli, ho explica: «la meua persona és perseguida a França per desacreditar-me» (Oldenburg, 1986, p. 43).

17. Eberhard Knobloch, editor dels manuscrits de Leibniz, també afirma que Leibniz ha llegit les obres de Mengoli.

18. Leibniz a Oldenburg, Oldenburg (1986, vol. ix, 26/2/1673, p. 488-498). Oldenburg a Leibniz, Oldenburg (1986, vol. ix, 6/4/1673, p. 556-563).

nita, sinó que segurament era una suma finita, i va afegir que tot i que Mengoli ho hagués fet, també ho havia fet ell, i que podia haver-hi coincidències.¹⁹

La *Speculationi di musica* (Bolonya, 1670) és, després de la *Novae*, la segona obra de Mengoli més citada en la correspondència europea. Amb aquesta obra començava la part més filosòfica de la carrera de Mengoli. Aquí és on parlava per primera vegada dels motius de la seva filosofia natural. L'obra té tres-centes pàgines, dividides en vint-i-cinc capítols que anomena *especulacions*. S'hi troba una original teoria del so, el rebuig de la teoria de la consonància de Galileu i l'extraordinària fisiologia de la percepció musical que Mengoli fonamentà sobre l'existència de dos timpans a l'orella humana. Per demostrar-la, Mengoli va fer una dissecció de l'orella amb Galeatio Manzio²⁰ i, per justificar la seva teoria del so, Mengoli utilitzà els logaritmes. Aquesta obra va ser comentada i parcialment traduïda a les *Philosophical transactions* (1674, p. 100, 6194-7000), després d'una espera impacient dels científics londinencs d'aquest llibre.²¹ També va aparèixer citada en la correspondència de Collins amb James Gregorie (1638-1675) i amb Isaac Newton (1643-1727), on Collins descrivia Mengoli com «un excellent matemàtic i músic».²²

Però no totes les citacions sobre Mengoli foren positives. És interessant assenyalar les referències a l'obra de Mengoli en la correspondència entre Isaac Barrow (1630-1677) i Collins. En una carta datada el 12 de novembre de 1664, Barrow agràia a Collins el llibre de Mengoli que li havia enviat (i que se suposa que és la *Geometriae speciosae elementa*, publica-

da el 1659) i comentava que Mengoli utilitzava un llenguatge nou, però que no era necessari escriure de manera tan complicada, i que això era un defecte de l'escriptor.²³ També en una altra carta, amb data 1 de febrer de 1666, Barrow comentà que llegir les obres de Mengoli era més dur que llegir obres escrites en àrab. Tanmateix, en aquestes cartes es deixa palès que les obres de Mengoli eren conegudes i esperades a Europa.

Del període que comprèn des del 1660 fins al 1670, se'n sap molt poc, ja que Mengoli no va publicar cap obra. En aquells anys, la nova filosofia experimental va ser introduïda a Bolonya d'una manera organitzada (Cavazza, 1980, p. 105-123). Intentant imitar la Royal Society of London, el matemàtic Geminiano Montanari (1633-1687) fundà, el 1665, l'Accademia Della Traccia.²⁴ En una carta a la Royal Society, explicava que en aquesta Accademia «es pretenia a partir dels experiments obtenir els axiomes i a partir dels axiomes, nous descobriments».²⁵

Mentrestant, Mengoli vivia retirat a la seva església de Santa Maria Magdalena i l'única activitat en què col·laborava era l'astronomia. Mengoli feia observacions sobre els astres, eclipsis, cometes..., amb la finalitat de trobar el «curs» del Sol, utilitzant el meridià de S. Petronio.²⁶ Sembla que era un observador poc acurat, ja que hi havia errors en les taules que apareixien a *Refrattione e parallasse solare* (1670), tal com li va fer observar Cassini. Aquest va criticar durament el mètode i les conclusions del llibre de Mengoli en la tercera carta de les tres que, amb el títol complex *De solaribus hypothesibus et refractionibus*

19. Es pot consultar aquesta correspondència a Oldenburg (1986, vol. ix, p. 648-652, 664-665).

20. Giovanni Galeatio Manzio va ser professor d'anatomia a la Universitat de Bolonya.

21. Aquest llibre va ser anunciat per Marcello Malpighi (1628-1694) a Oldenburg. Pel que fa a les cartes, el 28 d'abril de 1671, Oldenburg li va comunicar a Sluse que havia aparegut el llibre de música i que l'estava buscant. El 8 de juliol de 1671, Sluse li contestava que no en sabia res; també, el 22 d'octubre de 1671, Malpighi li deia que era a la impremta, i el 20 de febrer de 1672 Collins li deia que no el tenia. El 4 de març de 1672, Oldenburg tornava a preguntar-li a Sluse si sabia quelcom dels quatre volums de música que eren a una impremta de Roma. El 29 de maig de 1672, Sluse li contestava que els llibres allà eren desconeguts. Totes aquestes cartes sobre l'*Speculationi* es troben a Oldenburg (1986, vol. viii, p. 15-22, 145-151, 308-310, 545-547, 571-577; vol. ix, p. 77-80). El 26 de desembre de 1676, Malpighi anunciava a Oldenburg que li tornava a enviar els llibres de música i l'*Anno* (1675), que s'havien perdut. Després de cinc anys d'espera, Oldenburg aconseguia finalment el llibre de musica. Marcello Malpighi (Bolonya, 1628 - Roma, 1694), anatomista i metge, s'ocupà de l'estudi dels teixits amb microscopi. És el corresponsal italià d'Oldenburg i el que li envia els llibres i manté el contacte amb els europeus. Vegeu Oldenburg (1986, p. 167-169)

22. Aquí, a més d'enviar-li l'*Speculationi di musica*,

Collins enviava a Newton el *Circolo*. Vegeu Rigaud (1841, p. 299-301, 319-321).

23. «No he tingut temps durant aquesta temporada de considerar-lo seriosament; però castiga els meus ulls. Pel que jo percebo, està afectat per l'ús abundant de noves definicions i termes desconeguts, per això hom ha d'aprendre nous llenguatges per arribar al seu significat, encara que potser només quelcom ordinari és amagat a sota. Estimo això com una gran falta en qualsevol escriptor, treballar durant molt temps sense aconseguir el propòsit que necessitava, ja que hi ha poc a la ciència, però pot ser suficientment explicat en la manera usual de parlar» (Rigaud, 1841, p. 40). Totes aquestes cartes de Barrow a Collins es troben a Rigaud (1841, vol. ii, p. 33-40-46).

24. Geminiano Montanari (Mòdena, 1633 - Pàdua, 1687), astrònom, geofísic, biòleg, va ocupar la Càtedra de Matemàtiques de Bolonya el 1664, i els catorze anys passats allà van ser els més fructífers de la seva vida. Per a més referències, podeu consultar Tabarroni (1971, p. 485-487).

25. El metge Malpighi i l'astrònom Giovanni Domenico Cassini (Perpinyà, 1625 - París, 1712) també formaven part de l'Accademia Della Traccia. Cassini va ser professor d'astronomia a l'Studio di Bologna del 1650 al 1669, quan va marxar a París cridat per Colbert per dirigir el nou observatori real.

26. De fet, en el *Circolo* (1672) explica que la quadratura del cercle la volia per descriure els equinoccis i solsticis a través del *gnomone* de S. Petronio.

epistolae tres, van ser publicades el 1692 a la *Miscellanea italica physico-mathematica* a Bolonya. Prèviament, Malpighi, el 1672, ja havia enviat a Oldenburg aquesta carta, que va ser publicada en les *Philosophical transactions* (1672, VII, p. 5001-5002). Malgrat l'incident, Mengoli, el 1677, va expressar una opinió molt favorable de Malpighi: «Aquest és el més honrat literat del món, virtuós i humil.»²⁷

Després de la dècada de 1670, Mengoli ja no va tornar a ser citat i sembla que les seves últimes obres no van interessar a Europa. Encara que les seves obres eren molt apreciades pels matemàtics europeus, sembla que va morir aïllat i ignorat.²⁸

A través de les cartes editades fa pocs anys per Baroncini i Cavazza (1986), podem saber quelcom més sobre els pensaments de Mengoli en aquest darrer període. D'entre les cartes editades (seixanta-quatre), totes de Mengoli, i de les quals no hi ha les respostes, cinquanta-quatre estaven dirigides a la mateixa persona, concretament a Antonio Magliabechi (1633-1714), que era bibliotecari a Florència i, en certa manera, el contacte entre Mengoli i el món científic italià del moment. De fet, era un personatge molt influent de l'època i molts estudiosos li enviaven les seves obres perquè els en donés l'aprovació. Aquestes cartes comencen el 1674 i acaben el 1686, i formen part del segon període de la vida de Mengoli, fora d'aquesta investigació. En llegir-les, hom adverteix que Mengoli, cap al final de la seva vida, se sentia molt sol i el neguitejava el pensament que les seves obres no serien llegides per ningú, sobretot amb referència al seu gran projecte, *Arithmetica realis*, que és, segons ell mateix, «un sistema complet de lògica, de metafísica, i de física [...] Qui llegirà això?», es preguntava Mengoli al començament de l'*Anno* (Bolonya, 1675).

Durant quasi dos segles, el nom de Mengoli va romandre ignorat. Els motius no acaben de quedar clars. És possible que la seva manera d'escriure confusa i enrevessada, i la seva notació fessin difícil la lectura de les seves obres. En l'article «L' "oscurità" di Pietro Mengoli e i suoi difficili rapporti con i contemporanei», Cavazza assenyalava que la raó del seu aïllament no es trobava ni en l'obscuritat lingüística de les seves obres, ni en la incomprendibilitat dels temes i dels conceptes, sinó en una incompatibilitat ideològica de fons. Remarca Cavazza tres punts: l'interès per l'astrologia, la concepció auxiliar de la ciència i la teologia matemàtica (Mengoli tenia el propòsit de servir-se dels seus coneixements mecànics, astronòmics, matemàtics per explicar el model del món revelat a la Bíblia). En l'*Anno*, deia (Mengoli, 1673, «Protesta delle autore», sense numeració):

En aquest meu *Anno*, no suposo res més, sinó que la Terra està feta primer que el Sol, i que tots els altres cossos del món: en conseqüència [...]: que la Terra és immòbil, que el món gira, que el Sol es mou [...].

I Cavazza conclou dient: «l'aïllament de Mengoli i la incomprendió d'aquells que l'envoltaven pot ser explicat pel rol objectiu d'enemic de la necessitat vital d'autonomia de la ciència moderna en el difícil ambient creat per la contrareforma, en els seus últims anys de vida» (Cavazza, 1979/1980, p. 78).

Malgrat aquesta opinió, sembla una realitat que molts matemàtics de l'època no van llegir la seva obra a causa de la manera d'escriure enrevessada i poc clara. De fet, Mengoli va elaborar un llenguatge algebraic propi, on la notació, a mesura que s'avançava, s'anava complicant. A més, el camí que emprèn per introduir l'àlgebra a la geometria no coincideix amb les tendències del moment. També pogueren ajudar-hi factors externs, com que durant la segona meitat del 1600, a Bolonya hi havia una crisi cultural molt important, i els científics amb més renom se'n van anar (per exemple, Cassini a París i Montanari a Pàdua).²⁹ Els centres connectats amb els ambients europeus estaven limitats als florentins, al voltant de la cort dels Medici, i dels romans lligats a la cúria, però cap a Bolonya.

Un altre factor que podria ajudar a explicar l'oblit en què va caure l'obra de Mengoli és el nou camí de recerca que va emprendre Mengoli a partir del 1660. Després del *Circolo*, que li havia de permetre esbrinar les regles de solsticis i equinoccis, no va escriure més obres de matemàtica pura, sinó obres relacionades amb la cronologia i la cosmologia bíblica i que, a més, segons sembla no estaven d'acord amb el pensament filosòfic de l'època. Potser no hi ha una sola resposta, sinó una conjunció de tots aquests arguments.

Al nostre entendre, calen noves recerques d'aprofundiment sobre les obres d'aquest autor, a fi d'acabar de situar l'obra de Mengoli dins la història de les matemàtiques en el lloc que es mereix i, alhora, aclarir la incidència d'aquesta obra en el pensament del segle XVII.

4. Llenguatge algebraic de Mengoli

El 1655, Mengoli escrivia en vers una obra titulada *Via regia ad mathematicas per arithmetiam, algebram speciosam, & planimetriam, ornata maiestatae serenissimae D. Christinae reginae suecorum* (Bolonya, 1655), dedicada a la reina Cristina de Suècia, on li explicava una «via reial» per entendre les

27. Per a més referències, es pot consultar Cavazza (1979/1980, p. 58, nota 7, i p. 59, nota 8) i Baroncini i Cavazza (1986, p. 37).

28. Es pot consultar Gregory (1939, p. 179-186-203-231-232-236).

29. Sobre aquest tema, es pot consultar Pepe (1981, p. 56-101).

matemàtiques (vegeu la figura 3). En aquesta, Mengoli dividia les matemàtiques en tres parts: l'aritmètica, on explicava les operacions amb els nombres; l'àlgebra especiosa, on mostrava com utilitzar les lletres per resoldre equacions, i la planimetria, on tractava de figures planes i les seves propietats. Mengoli assumia l'àlgebra com una part de les matemàtiques juntament amb l'aritmètica i la geometria. Encara que en l'obra no definia aquests termes, sí que explicava el terme *àlgebra especiosa* i en remarcava la utilitat.



© British Library. British Museum (Londres).

FIGURA 3. Portada de l'obra *Via regia ad mathematicas per arithmetica, algebra speciosam, & planimetria, ornata maiestatae serenissimae D. Christinae reginae suecorum*.

Aquesta actitud cap a l'àlgebra difereix profundament de la del seu mestre Cavalieri i de la d'altres com Evangelista Torricelli (1608-1647), els quals, en els seus escrits, exclouen deliberadament els càlculs algebràics.³⁰ Al començament de la segona part de la *Via regia*, dedicada a l'àlgebra especiosa, Mengoli la descrivia com un art d'aquesta manera:

Sobre la utilitat de l'àlgebra especiosa.

Una sola entre les matemàtiques s'anomenarà *àlgebra especiosa*, un art en el qual res s'amaga al que investiga. Si preguntes «si és o no és», consisteix a respondre la veritat; si preguntes «quant és», aquest art ho fa prou satisfactòriament, ja que als nombres genèrics [aquest art] els proporciona maneres aptes per fer i per provar les coses fetes i dites. Així, és a saber, que hi intervindran dos tipus de nombres generals, aquells que busques [incògnites] i aquells que pots donar [dades] arbitràriament.³¹

En aquest punt del desenvolupament del seu pensament, Mengoli considerava l'àlgebra sobretot com un art per demostrar resultats ja coneguts més que un mètode per obtenir-ne de nous. En els seus escrits posteriors, com veurem, tindrà una visió més extensa de l'àlgebra, i l'emprarà per fer noves proves i obtenir nous resultats.

A la *Via regia*, Mengoli, igual que Viète, denotava que representaria els nombres amb lletres i, a més, presentava l'àlgebra com un llenguatge, comparant metafòricament les figures lingüístiques amb les figures algebràiques. Així, les consonants representaven dades; les vocals, incògnites; les síl·labes, expressions algebràiques d'una sola lletra; els signes de puntuació, les regles d'addició, substracció, etc.; les paraules, expressions algebràiques de més d'una lletra; els textos, igualtats; els versos, equacions. Finalment, donava una classificació de les equacions fins a tercer grau segons el grau i els signes. Mengoli no posava cap exemple, ni amb lletres ni amb nombres, d'aquestes comparacions.

L'objectiu de Mengoli en introduir aquestes comparacions metafòriques era evidentment didàctic, per fer entendre les matemàtiques a la reina Cristina de Suècia a través d'un «camí reial», segons la seva prò-

30. De fet, Cavalieri, a l'*Exercitatione quarta* (1647, p. 243-245) escrivia: «A partir d'aquestes demostracions, el lector no ignorant d'aquestes multiplicacions algebràiques comprendrà que aquesta via (algebraica) és molt més fàcil que l'euclidiana, que té una estructura més llarga a la proposició 17 i 18.» Tanmateix, Cavalieri no va utilitzar aquesta via algebraica. També, a Anglaterra, Thomas Hobbes (1588-1679), en la seva *Examinatio et emendatio mathematicae hodiernae* (1660), condemnava emfàticament la nova àlgebra. En la seva opinió, la geometria i la seva subordinada aritmètica eren ciències, mentre que l'àlgebra, que contemplava essencialment com un raonament simbòlic, era un art capaç d'expressar eficientment i ràpidament les inven-

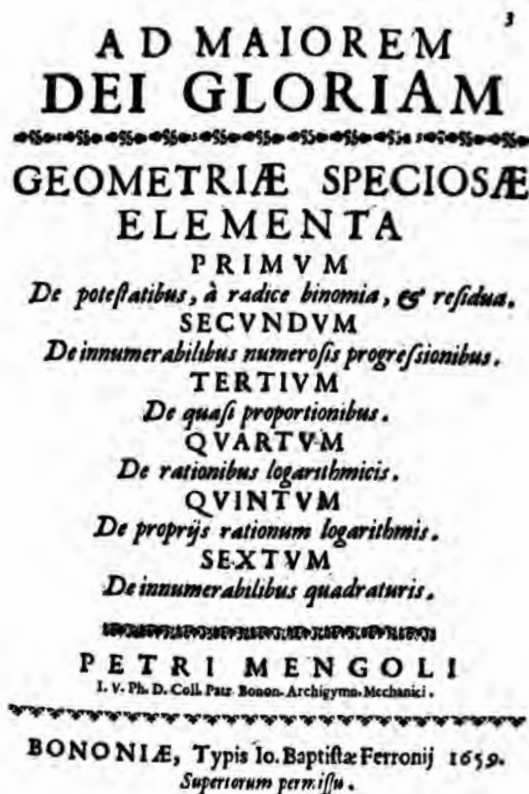
cions de la geometria, però no una ciència. Isaac Barrow (1630-1677), que també s'oposava a l'àlgebra, considerava l'aritmètica com una part de la geometria, la geometria l'única ciència veritable i l'àlgebra únicament una eina lògica. Sobre aquest tema, es pot consultar Pycior (1997, p. 135-166) i Massa (2001, p. 709-711).

31. «Una, mathematicas inter, speciosa vocatur algebra: quaerenti qua nihil arte latet. Sive rogas, utrum sic, vel non, dicere verum est; sive rogas, quantum est: ars facit ista satis. Ut pote quae numeris generalibus instruit aptos, ad facere, ad facta, & dicta probare, modos. Scilicet intererit generalis uterque fuisse; quem-quaeris numerus, quem-dare cunque potes» (Mengoli, 1655, p. 19).

pia expressió. La seva originalitat rau precisament a descriure explícitament l'àlgebra com un llenguatge, més que en cap contribució nova a la formació del llenguatge simbòlic. Les seves idees sobre aquest llenguatge simbòlic s'entendran millor en les seves obres posteriors, on desenvoluparà el llenguatge algebraic de Viète per obtenir nous resultats.

El 1659, Mengoli va publicar *Geometriae speciosae elementa*, obra de 472 pàgines de matemàtica pura. Està composta de sis capítols que ell anomenà *elements* i d'una introducció titulada «Lectori elementario», on s'explicava cadascun dels capítols per separat. En aquesta obra, l'àlgebra va esdevenir una part essencial. El títol ja suggereix el desenvolupament de l'àlgebra especiosa que Mengoli anomenà *geometria especiosa*; utilitzant el llenguatge simbòlic de Viète, Mengoli va crear noves eines algebraïques a fi de determinar les seves quadratures. Sense voler-ho, Mengoli va contribuir a crear una part de la nova branca de les matemàtiques, que estava emergint en aquell moment gràcies a les obres de Descartes i Fermat.

En el primer capítol d'aquesta obra, titulat «De potestatibus, à radice binomia et residua», Mengoli donava les deu primeres potències d'un binomi, expressades en lletres, tant pel que fa a la suma com pel que fa a la diferència, i explicitava que era possible estendre aquest resultat a potències més grans. El segon, titulat «De innumerabilibus numerosis progressionibus», conté càlculs de nombroses sumes de potències i productes de potències amb una notació pròpia, així com demostracions d'algunes identitats. En el tercer, que té com a títol «De quasi proportionibus», a partir de la definició dels conceptes «raó quasi nul·la», «raó quasi infinita», «raó quasi la igualtat» i «raó quasi un nombre», desenvolupava una teoria de quasi proporcions, basant-se en la teoria de proporcions del llibre v d'Euclides. En el quart capítol, basant-se també en el llibre v d'Euclides, elaborava una completa teoria de proporcions logarítmiques. En el cinquè, construïa el logaritme d'una raó amb la teoria anterior i demostrava les seves propietats. Finalment, en el sisè, calculava les quadratures de corbes desenvolupant l'àlgebra de Viète a través d'unes taules triangulars i la teoria de quasi proporcions (vegeu la figura 4).



© Bodleian Library. Oxford University (Oxford).

FIGURA 4. Portada de l'obra *Geometriae speciosae elementa*.

Les principals fonts algebraïques de Mengoli van ser els textos de Viète, de Pierre Hérigone³² (1580-1643) i de Jean Beaugrand³³ (1595-1640), com es pot deduir dels seus propis comentaris al començament del llibre:

D'altra banda, com François Viète i altres analistes [...]. A aquests símbols que Viète, Hérigone, Beaugrand [...]»³⁴

En el llibre segon dels sis volums de l'enciclopèdia *Cursus mathematicus* (1634-1642-1644), Hérigone havia inclòs un tractat de 296 pàgines, titulat *Algebra*, que estava compost de 20 capítols, i que tractava d'equacions i de les seves solucions, utilitzant el llen-

32. Cal remarcar que Hérigone va distingir entre àlgebra vulgar, que tracta de nombres, i àlgebra especiosa, que tracta d'espècies. Va definir l'àlgebra així: «La doctrina analítica o l'àlgebra és l'art de trobar la incògnita prenent-la com si fos coneguda, i trobant la igualtat entre aquesta i les magnituds donades.» També definia l'àlgebra especiosa així: «Però l'àlgebra especiosa no està pas limitada a algun gènere de problema, i no és pas menys útil a inventar tot tipus de teoremes que a trobar les solucions i demostracions dels problemes» Hérigone (1644, II, p. 1).

33. Beaugrand era també matemàtic; el 1635 va romandre un any senser a Itàlia i va visitar Cavalieri a Bolonya. Va publicar una versió de *In artem analyticem isagoge*, que era de fet el treball de Viète estès amb alguns escolis i un compendi matemàtic. Trobareu més referències a Cifoletti (1990, p. 114-128).

34. «Porro cum Francisco Viettae aliisque placuerit analysitis [...].» «Quibus characteribus à Vietta, Herigonio, Beaugrand [...]» (Mengoli, 1659, p. 11-12).

guatge algebraic. Aquest text està clarament inspirat en l'obra de Viète, encara que Hérigone utilitzava una presentació i notació molt diferents.³⁵

Mengoli no va citar Descartes com a font; tampoc el tractament dels símbols algebraics al llarg del llibre fan pensar que l'hagi llegit.³⁶ Pel que fa a Fermat, cal remarcar que els seus manuscrits i cartes circulaven entre els matemàtics parisencs i van arribar a Itàlia a través de Beaugrand i Marin Mersenne (1588-1648). És possible que Mengoli conegués els resultats de Fermat. Torricelli, Matteo Ricci (1552-1610) i Cavalieri, certament, sí que els coneixien. Podria també haver conegut el mètode de màxim i mínim de Fermat, que va ser publicat en el llibre sisè del *Cursus mathematicus* d'Hérigone. Encara que Mengoli no cités Fermat com a font per a la seva *Geometriae*, la lectura del mètode de Fermat en Hérigone, o en els seus manuscrits, podria haver inspirat aquesta obra.

4.1. Notació de Mengoli

Una de les dificultats per poder entendre l'obra de Mengoli és la notació, que és original i es va compllicant al llarg del llibre.³⁷ Després de les definicions, en una pàgina a part i a sota el títol «Explicationes quarundam notarum» (vegeu la figura 5), Mengoli explicava les notacions bàsiques que utilitzaria al llarg del llibre.³⁸ Començava amb l'addició, que representa amb una creu; la substracció, amb una línia;³⁹ la igualtat, amb dos punts; la raó, amb punt i coma, i la igualtat entre raons, utilitzant els punts i comes com a signes de raó i els dos punts com a signe igual entre raons.⁴⁰ Per exemple, escrivia

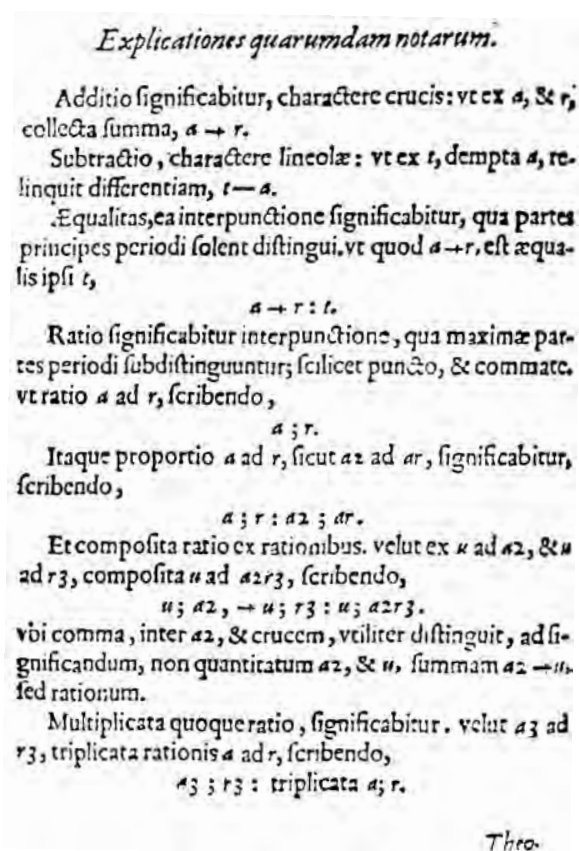
« $a ; r : a^2 ; ar$ » per representar $a : r = a^2 : ar$.

Representava la potència d'una raó amb la paraula *triplicata*, *duplicata*, etc., segons convingués, i escrivia:

« $a^3 ; r^3 : triplicata a ; r$ »⁴¹ per representar $a^3 : r^3 = (a : r)^3$.

Mengoli també anomenà totes les lletres i expressions algebraiques que va emprar en la seva anàlisi.

Hi ha certes diferències entre la notació mengoliana i les de Viète, Descartes i Hérigone. Per exemple, la igualtat la representava per dos punts, mentre que Viète utilitzava una abreviació de la paraula *aequalis*, Descartes escrivia el símbol α i Hérigone 2/2. Per multiplicar, Viète emprava la paraula *in*, mentre que Mengoli, Descartes i Hérigone escrivien una lletra al costat de l'altra. Mengoli utilitzava un punt i coma per expressar la raó entre dues quantitats, Viète emprava l'expressió *ad*, Descartes à i Hérigone el símbol π .



© Bodleian Library, Oxford University (Oxford).

FIGURA 5. «Explicationes quarundam notarum» de la *Geometriae*.

35. Sobre Hérigone, podeu consultar Massa (en premsa).

36. D'acord amb Luigi Pepe, *La géométrie* de Descartes no va tenir una gran difusió a Itàlia. Pepe remarca que n'ha trobat dues referències, una a Giannantonio Rocca (1607-1659), deixeble del col·legi jesuïta de Parma, que tenia una traducció de l'obra de Descartes. Mengoli comenta que vol quadrar figures com a resposta a una pregunta proposada per Rocca: és l'única associació trobada. Vegeu Pepe (1982, p. 263) i Mengoli (1659, p. 348).

37. L'article de Vacca (1915, p. 617-20) ja va subratllar i explicar l'originalitat de la notació de Mengoli.

38. En l'element primer fa una excepció i després de

les definicions no dona els teoremes, sinó que abans dona un full amb l'explicació de les notacions.

39. Els signes + i - sembla que eren els únics acceptats unànimament i havien sigut introduïts per l'escola alemanya el segle anterior. Encara que Mengoli deia que utilitzava els mateixos símbols que Viète, el signe igual no coincidia: Viète feia servir un abreujament de la paraula *aequalis*. Es pot consultar Viète (1970, p. 5).

40. Com fa notar Cajori (1928, p. 289), aquesta va ser una notació esporàdica.

41. Primer dona la notació i després, en el teorema 3 de l'«Elementum primum», demostra que la notació representa la potència (Mengoli, 1659, p. 10).

A l'hora de representar les quantitats amb símbols, Mengoli no distingia entre vocals i consonants, les quals podien representar dades, incògnites o variables. Emprava lletres majúscules i minúscules; en general, les minúscules representaven dades i les majúscules variables. Els noms de les lletres i les expressions que emprava eren nous. En alguns casos, aquests noms eren els mateixos que utilitzava Viète, tals com la paraula *radix* (la primera potència); d'altres eren creacions originals de Mengoli i els posà noms com ara *triprimam* ($a^3 r$), *unisextam* ($a r^6$) i d'altres. Per representar potències, Viète va retenir les paraules *A quadratus*, *A cubus*... Descartes escrivia els exponents com els escrivim avui, amb una excepció: escrivia xx per representar el quadrat. En canvi, Mengoli escrivia els exponents en el costat dret de la lletra, x^2 , com feia Hérigone.

Cal recordar que, en el segle XVII, no hi havia criteris unificats pel que fa a les diferents alternatives simbòliques.⁴²

4.2. Eines algebraiques

En les definicions, Mengoli fixà les lletres amb les quals representaria les quantitats. A la definició quarta va introduir la *rationalis* o unitat u :

4. La quantitat, des de la qual una progressió continuament proporcional és ordenada en infinit, s'anomenarà *racional* (*rationalis*) i es representarà amb la lletra u .⁴³

Aquí, Mengoli va voler deixar clar que considerava nombres en proporció contínua indefinidament a partir de la unitat. Al llarg de l'«Elementum tertium» Mengoli es va referir a aquesta quantitat, que representava amb la lletra u , com la unitat. Quan utilitzava aquesta definició en les demostracions, Mengoli escrivia:

$$u : a = a : a^2 = a^2 : a^3 = \dots$$

Mengoli, en l'«Elementum secundum», va inventar una manera d'escriure i de calcular les sumes finites de potències i de productes de potències. No va escriure les sumes de potències donant valors o bé escrivint els nombres amb els signes + i punts suspensius, sinó que va representar els nombres amb lletres. D'aquesta manera, va crear una construcció original i avantatjosa que li permetés calcular aques-

tes sumes, que considerava expressions algebraiques noves.

Va considerar un nombre qualsevol, o *tota*, representat per la lletra t , i el va dividir en dues parts: « a » (abscissa) i « $r = t - a$ » (residu):

Les parts de *tota* s'anomenaran *part separada* [abscissa] i *part restant* [residua], i la part separada es representarà amb la lletra a i la restant amb la lletra r .⁴⁴

A continuació, va considerar *tota* igual a 2, 3..., i va posar exemples fins a 10. És a dir, si t és 2, a és 1 i r és 1. Si t és 3, a pot ésser 1 o 2 i llavors r és 2 o 1, respectivament. Si t és 4, a pot ésser 1, 2 o 3, i llavors r és 3, 2 o 1, respectivament, i així indefinidament. També va calcular els quadrats i els cubs de a , els productes de a i r , dels quadrats de a i r , etc. Per exemple, si t és 3, la suma valdrà 3, ja que és la suma d'1 i 2. Si t és 4, la suma valdrà 6, ja que és la suma d'1, 2 i 3, etc. Va escriure $O.a$ per expressar les sumes des de $a = 1$ fins a $a = t - 1$:

$$O.a = \sum_{a=1}^{a=t-1} a$$

Mengoli va ordenar totes aquestes sumes de potències i productes de potències en una taula triangular que va anomenar *taula dels símbols* (*tabula speciosa*):

$$\begin{array}{c} O.u. \\ O.a \ O.r. \\ O.a^2 \ O.ar \ O.r^2. \\ O.a^3 \ O.a^2r \ O.ar^2 \ O.r^3. \\ \text{Tabula speciosa} \end{array}$$

Els termes d'aquesta taula són sumatoris del tipus

$$\begin{array}{l} O.u = (t - 1) \\ O.a = 1 + 2 + 3 + \dots + (t - 1) \\ O.r = (t - 1) + (t - 2) + (t - 3) + \dots + 1 \\ O.a^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (t - 1)^2 \\ O.ar = 1 \cdot (t - 1) + 2 \cdot (t - 2) + 3 \cdot (t - 3) + \dots + (t - 1) \cdot 1 \end{array}$$

Mengoli va combinar aquesta taula de símbols amb la taula dels nombres combinatoris per obtenir una nova taula. Llavors va utilitzar les noves relacions entre els termes d'aquestes taules per calcular els sumatoris de potències d'enters positius i de productes de potències d'enters positius indefinida-

42. Tobareu més referències sobre aquest tema a A. Malet i J. Paradís (1984, p. 159-176).

43. «4. Quantitas, unde progressio continuè proportionalium, ordinatur in infinitum, dicetur, rationalis. & significabitur, caractere u » (Mengoli, 1659, p. 4).

44. «Et partes totae, dicuntur, abscissa & residua: & significabitur abscissa, caractere a ; & residua, r » (Mengoli, 1659, p. 21).

ment.⁴⁵ Concretament, en el teorema 22 de l'«Elementum secundum», va provar:

$$(m+n+1) \cdot \binom{m+n}{n} \cdot \sum_{a=1}^{a=t-1} a^m \cdot (t-a)^n = t^{m+n+1} - P(t^s)^{46}$$

Aquí $P(t^s)$ és un polinomi amb variable t de grau més petit o igual que $m+n$, amb coeficients del mateix tipus que els «nombres de Bernoulli», depenent dels nombres combinatoris.

Les taules triangulars són una eina algebraica molt emprada per Mengoli. En l'«Elementum primum» els elements de la taula eren nombres, representats per lletres, que multiplicant-los pels nombres combinatoris li permetien calcular els sumands ($a^m r^n$) que formen el desenvolupament d'una potència natural d'un binomi qualsevol. En l'«Elementum secundum» els elements de la taula eren sumatoris de potències i de productes de potències ($O \cdot a^m r^n$). Més endavant, com veurem, en l'«Elementum sextum», els elements de la taula representen figures entre (0,1), determinades per corbes d'equacions actualment expressades com $y = K \cdot x^m \cdot (t-x)^n$. L'originalitat de Mengoli radica no en la definició de les taules triangulars, sinó en el seu tractament. D'una banda, Mengoli va utilitzar l'àlgebra de Viète per crear unes taules amb sumatoris i, d'altra banda, va emprar les relacions entre les sumes i els nombres combinatoris del triangle aritmètic per demostrar un dels resultats importants del seu llibre, l'expressió de la suma de les $(m+n)$ potències de $t-1$ enters, en el teorema 22 de l'«Elementum secundum».

Una altra contribució original de Mengoli va ser la justificació i l'ús de la noció de variable en l'«Elementum tertium». La seva idea era que les lletres podien representar no únicament nombres o incògnites, sinó també variables: és a dir, quantitats indeterminades, però determinables. Per exemple, els sumatoris eren quantitats indeterminades, però podien ser deter-

minades quan el valor de t fos conegut. Per aclarir aquesta idea, Mengoli explicava:

Quan escric $O.a$, després del capítol precedent tinc immediatament «el sumatori (la massa) de totes les abscisses». Però quin valor té aquest sumatori, encara no ho saps, si no escrius de quin nombre és el sumatori. Però ho saps si assignes que $O.a$ és el sumatori del nombre t . I d'aquesta manera no saps quant és, si al mateix temps no assignes quin és el valor de la lletra t . Però quan et permeti que fixis un valor qualsevol per a la lletra t , i tu, utilitzant aquest permís, diguis que val 5, a l'instant certament assignaràs que $O.a$ val 10, que t^2 val 25, que t^3 val 125 i que $O.r$ val 10, i si les lletres t són determinades, les quantitats $O.a$, $O.r$, t^2 , t^3 seran determinades. Per la qual cosa, abans que tu hagis utilitzat el permís donat, tenies certament $O.a$, $O.r$, t^2 , t^3 , quantitats [que són] determinables, però [quantitats] indeterminades.⁴⁷

Mengoli va aplicar aquesta idea de variable al càlcul de «quasi raons» d'aquests sumatoris. La raó entre sumatoris és també indeterminada, però és determinable augmentant el valor de t . Efectivament, la raó no arriba a aquest valor, el qual pot ser interpretat com el valor actual; en canvi, tendeix a aquest valor a mesura que t augmenta. És en aquest sentit que Mengoli va entendre l'expressió «raó indeterminada determinable». Mengoli va seguir donant exemples per aclarir la noció de raó «quasi un nombre». A partir d'aquesta idea, va construir la teoria de quasi proporcions que, com veurem, va ser essencial en el seu mètode de quadratures.

5. Quadratures algebraiques de Mengoli

Mengoli va desenvolupar la seva anàlisi algebraica en l'«Elementum sextum» titulat «De innumerabilibus quadraturis». Aquí va calcular amb el seu nou

45. De fet, la fórmula de la suma de potències no era nova. El primer reconeixement d'aquesta com una regla general va ser aparentment fet per Fermat el 1636, que va anunciar que havia solucionat «el que és potser el problema més bonic de tota l'aritmètica» (Fermat, 1891-1922, p. 69), és a dir, donada una progressió aritmètica, trobar la suma de qualsevol potència dels elements de la progressió. Fermat va establir les regles, però no va donar ni la fórmula ni la demostració. Roberval, Wallis i Pascal també van expressar aquests sumatoris per a les primeres potències i en van deduir el valor quan el nombre de termes augmenta indefinidament. Roberval va escriure aquests resultats fins al grau 4, Wallis no va passar de la potència sisena i Pascal només fins a la tercera. Podeu consultar els càlculs de Roberval a Auger (1962, p. 19) i Walker (1986, p. 171); sobre Wallis, podeu veure Wallis (1972, p. 384) i Scott (1981, p. 34), i sobre Pascal podeu veure Bosmans (1924, p. 36-41), Boyer (1943, p. 239-241) i Pascal (1954, p. 166-171). Més tard, Johan Bernoulli (1654-1705), en la seva *Ars conjectandi*

(1713), va deduir i escriure la fórmula general sobre la base de les regles dels nombres poligonals. Vegeu el tercer volum a Bernoulli (1975, p. 164-168).

46. De fet, Mengoli no va escriure una fórmula general amb m i n , però va calcular trenta-sis sumatoris. Sobre aquests càlculs, podeu consultar Massa (1997, p. 266-268).

47. «Cum scriptero $O.a$, statim ex praecedenti capite habes massam ex omnibus abscissis: sed quota sit haec massa, nondum habes, nisi scriptero, cuius numeri sit massa. Quod si assignavero $O.a$, numeri t massam esse; neque sic habes, quota sit, nisi simul assignavero, quotus est numerus, valor litterae t [...] Cum verò licentiam dederò, ut quotum quemque litterae t valorem taxes; tuque huiusmodi usus licentia dixeris, t valere quinario: statim profecto assignabis & $O.a$, valere 10; & t^2 , valere 25; & t^3 , valere 125; & $O.r$, valere 10; & determinatae litterae t , determinatas esse quantitates $O.a$, $O.r$, t^2 , t^3 . Quare data licentia antequam usus fueris, habebas profecto $O.a$, $O.r$, t^2 , t^3 , quantitates indeterminatas determinabiles» (Mengoli, 1659, p. 61).

mètode les quadratures de les corbes planes, en l'interval $(0,t)$, determinades per equacions actualment expressades per $y = K \cdot x^m \cdot (t - x)^n$.

En uns càlculs preliminars, en la carta dedicatòria a Cassini, Mengoli va obtenir els valors de les quadratures d'aquestes corbes emprant el mètode dels indivisibles de Cavalieri. A més, remarcava que ja les havia calculat dotze anys abans (1647) i enuncitava vint-i-cinc resultats. Tot seguit, reconeixia que no havia publicat aquesta investigació a causa dels atacs que havia rebut aquest mètode:

Mentrestant, vaig deixar de banda aquest afegit que havia fet a la geometria dels indivisibles, tenint por de l'autoritat d'aquells que jutgen falsa la hipòtesi que la infinitud de totes les rectes d'una figura plana sigui una figura plana; ho vaig deixar no perquè jo fos d'aquesta opinió, sinó que la vaig esquivar perquè la trobava dubtosa i vaig intentar, si m'era possible, d'establir fonaments nous i segurs pel mateix mètode dels indivisibles o per uns altres mètodes nous que fossin equivalents.⁴⁸

Mengoli creia que el mètode dels indivisibles del seu mestre no tenia bases sòlides i, per això, volia establir fonaments sòlids en el seu nou mètode, per quadrar tant les corbes abans esmentades com corbes noves i, especialment, el cercle. Mengoli va voler que quedés clar des d'un començament la seva aplicació de l'àlgebra a la geometria i va explicar acuradament la identificació de les figures que volia quadrar amb les expressions algebraïques que utilitzava per representar-les, sense fer gairebé cap diuix. Amb aquest objectiu, va descriure el seu propi sistema de coordenades; tot seguit, va identificar les figures geomètriques amb les expressions algebraïques i, finalment, va emprar les taules triangulars d'aquestes expressions i la teoria de quasi proporcions per calcular el valor de les quadratures d'aquestes figures.

5.1. Sistema de coordenades

Mengoli va donar el seu propi sistema de coordenades, definint l'abscissa i l'ordenada i descrivint individualment les ordenades de les figures a través de les abscisses en un interval. Proposà un segment de línia recta qualsevol, amb el nom de *racional (rationale)*, o bé *tota*, que representà amb la lletra t (de vegades amb la lletra u , si val 1):

3. I sigui donada una posició, a la qual se l'anomena *base*.⁴⁹ 4. I a un dels punts de l'extrem [de la base] se l'anomena *fi de les abscisses* [origen de la base]. 6. I a la quantitat que [va] des de qualsevol punt de la base fins a la fi de les abscisses, en la mesura que és estesa la mateixa base, se l'anomena *abscissa* [a].⁵⁰

Va definir i utilitzar la paraula *abscissa* com la nostra x , però dins d'un segment donat t o u . Mengoli sempre treballava dins d'una base finita on l'abscissa és representada per la lletra a i el residu és $t - a$ o bé $u - a$ segons sigui la base un valor donat t o bé la unitat u . La paraula *abscissa* ja havia aparegut en alguns textos de Fermat el 1644, de Torricelli el 1646, de Cavalieri el 1647 i també del P. Stefano Degli Angeli (1623-1697) el 1659, però mai no havia estat definida ni utilitzada com ho fem actualment.⁵¹ En concret, Mengoli considerava la base AR:

A—————B—————R

On A és la fi de les abscisses, R és la fi dels residus, AB és l'abscissa i BR és el residu.

Pel que fa a l'ordenada, Mengoli utilitzà aquesta paraula en lloc de la paraula *applicata* que s'utilitzava comunament en aquella època, i l'emprà com ho fem ara.⁵² Definia les ordenades per a cada valor de l'abscissa de la base, però no anomenà mai la paraula *corba*.⁵³ Primer explicava com traçaria les ordenades de figures conegudes, com ara un quadrat o un trian-

48. «Ipsam interim accessionem, quàm geometriae indivisibilium feceram, praeterivi: veritus eorum auctoritatem, qui falsum putant suppositum, omnes rectas figurae planae infinitas, ipsam esse figuram planam: non quasi hanc sequens partem; sed illam quasi non prorsus indubiam devitans: tentandi animo, si possem demum eandem indivisibilium methodum, aut aliam equivalentem novis, & indubijs prorsus constituere fundamentis» (Mengoli, 1659, p. 364).

49. Els nombres que apareixen al començament són els nombres d'ordre de les definicions de Mengoli.

50. «3. Sitque data positione; quae dicetur, *basis*. 4. Eiusque alterum extremorum punctorum, dicetur, *finis abscissarum*. 5. Alterum, *finis residuarum*. 6. Et ab unoquoque puncto in basi sumpto, usque ad finem abscissarum, quatenus ipsa basis extenditur, quantitas dicetur *abscissa*» (Mengoli, 1659, p. 367).

51. La paraula *abscissa* apareix a Fermat (1891-1922,

p. 195), Torricelli (1919, III, p. 366), Cavalieri (1647, p. 858-859) i Angeli (1659, p. 175-179). La paraula que s'utilitza també amb el mateix sentit és *diàmetre*.

52. Descartes defineix les ordenades com «celles qui s'appliquen par ordre» (Descartes, 1954, p. 67). Aquí hi ha una nota que diu: «L'equivalent de *ordination application* era utilitzat en el segle xv traduïnt Apolonius.» La nota també cita que el *Diccionari matemàtic d'Hutton* (1796) dóna *aplicada* com la paraula corresponent a l'ordenada i diu que també s'utilitza *ordenada aplicada*. De fet, Fermat i Cavalieri utilitzen *applicata*. Mengoli, en el *Circolo*, les anomena *ordinatamente applicate*.

53. Sembla que Fermat donava un sistema de coordenades similar per definir les corbes, però la seva ordenada no era sempre perpendicular i, en aquests casos, donava l'angle que formava amb l'eix d'abscisses (Mahoney, 1971-1991, p. 568).

gle, a partir de la seva construcció sobre cada punt de la base:⁵⁴

10. Sobre una base és descrit un quadrat, i suposo que des d'un qualsevol dels punts de la base és traçada una recta fins al costat oposat, mantenint-la sempre paral·lela als costats del quadrat, la qual és anomenada *ordenada en el quadrat*.⁵⁵

En el cas de les figures mixtilínies (figures determinades per rectes i corbes), Mengoli no va definir les ordenades mitjançant la seva construcció, sinó que va explicar que eren iguals a les abscisses o a les potències de les abscisses i les va anomenar *ordenades en forma*. De fet, la igualtat entre les ordenades i les potències de les abscisses era expressada mitjançant una proporció:

$$(1 : y) = (1 : x)^m$$

5.2. Les expressions algebraïques de les figures geomètriques

Mengoli va definir les figures que volia quadrar «estes per les seves ordenades», les anomenà *formes* i les representà per l'expressió *FO*. Mai no va mencionar la paraula *corba*, sinó que va parlar de *figura* o *forma*, paraula que prové dels segles anteriors i s'identificava amb la mesura de la qualitat d'una quantitat. Aquesta paraula apareixia, entre altres llocs, a l'obra de Nicolau d'Oresme (1323-1382) que duu per títol *Tractatus de latitudinibus formarum* (1346). Una «forma» era qualsevol quantitat o qualitat variable en la naturalesa. La intensitat o latitud era mesurada verticalment sobre una línia base que mesurava la longitud, i la quantitat es mesurava per l'àrea de la figura descrita (Clagett, 1968; Lindberg, 1978, p. 231-241, i Crombie, 1980, p. 82-95).

Mengoli va començar amb figures conegudes, com ara el quadrat, després va considerar els triangles i finalment les «formes» estes per ordenades qualssevol del tipus $y = x^m \cdot (t - x)^n$:

12. I el quadrat està per les seves «ordenades» és anomenat *forma de tots els racionals* i *forma de totes les totes*, i és representat amb els caràcters *FO. u.* i *FO. t*.⁵⁶

Definia el triangle com a «forma de totes les abscisses» i el representava amb el caràcter *FO.a*. Les paràboles eren la «forma de totes les abscisses segones», la «forma de totes les [abscisses pels residus] *uniprimes*», i la «forma de tots els residus segons»; els representava amb els caràcters *FO. a².*, *FO. ar.*, *FO. r².* [$y = x^2$, $y = x \cdot (1 - x)$, $y = (1 - x)^2$]. I, en general, definia la forma estesa per a qualsevol ordenada:

23. I, generalitzant, si sobre la base es forma una figura, estesa no solament per «ordenades en el quadrat», en la qual una ordenada qualsevol és considerada com algun element dels de la taula proporcional [$a^m \cdot (t - a)^n$ essent a l'abscissa], [aquesta figura] és anomenada *forma de tots tals proporcionals* i és representada amb els caràcters pertinents; per exemple, «forma de totes les abscisses terceres», *FO. a³.*, «forma de tots els [productes de les abscisses segones pel residu] *biprimes*», *FO. a² (t - a)*.⁵⁷

Pel que fa a la representació gràfica d'aquestes figures, només dibuixava un eix horitzontal com a base, que anomenà *racional*, no dibuixava eix vertical i sempre dibuixava les ordenades com a rectes perpendiculars a la base. Tanmateix, Mengoli feia molt pocs dibuixos en la *Geometriae*, i en el *Circolo* no en va fer cap.

Després de definir les figures o formes, les ordenà en taules triangulars. Les taules triangulars eren una eina molt utilitzada per Mengoli dins els *Elementa*, com ja hem explicat. Mengoli utilitzà aquestes taules per donar les propietats de les figures, agrupant-les segons el seu grau i segons la seva posició en elles. Mengoli donà número d'ordre a les files de les taules triangulars; així, el vèrtex no tenia número d'ordre, la fila que tenia dos termes de grau 1 era la primera, la fila que en tenia tres de grau 2 era la segona, etc.

Mengoli explicà que quan aquestes formes construïdes sobre una base de mida 1 (d'ara en endavant anomenarem també *formes* a les figures geomètriques que volia quadrar) estiguessin col·locades com els termes d'una taula, en formarien una que ell anomenà *tabula formosa*, 'taula de les formes', on apareixien les formes sense cap coeficient:

FO. u.
FO.a. FO.r.
FO.a². FO.ar. FO.r²
FO.a³. FO.a²r. FO.ar². FO.r³.
Tabula formosa

54. En el *Circolo*, quan defineix aquestes ordenades diu que han de formar angle recte amb la base (Mengoli, 1672, p. 4).

55. «10. Super basi describatur quadratum: & ab uno quolibet puncto in basi sumpto, recta ducatur, usque ad oppositum latus, reliquis lateribus quadrati parallela: quae dicitur, *ordinata in quadrato*» (Mengoli, 1659, p. 368).

56. «12. Et quadratum, per suas ordinatas extensum, dicitur, *forma omnes rationales*, & *forma omnes totae*. & signi-

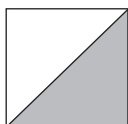
ficabitur characteribus *FO.u* & *FO.t*» (Mengoli, 1659, p. 368).

57. «23. Et generaliter, si super basi concipiatur figura, extensa non nisi per ordinatas in quadrato: & in qua, unaquolibet ordinata, est assumpta quaedam in tabula proportionalium: dicitur, *forma omnes tales proportionales*. aptoque significabitur character. vt forma omnes abscissae tertiae, *FO.a3*: forma omnes biprimae, *FO.a2r*: forma omnes unisecundae, *FO.ar2*: forma omnes residuae tertiae, *FO.r3*. & sic deinceps» (Mengoli, 1659, p. 369).

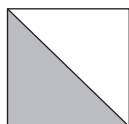
Al dessota es poden veure els dibuixos actualitzats realitzats per l'autora d'aquestes figures geomètriques disposats en forma de taula triangular.



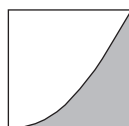
FO. u.



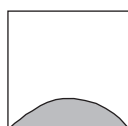
FO. a.



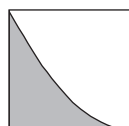
FO. r.



FO. a².



FO. ar.



FO. r².

La forma del vèrtex, *FO.u.*, representa un quadrat de base 1. Les dues formes de la primera fila representen dos triangles. El primer, *FO.a.*, està determinat per la bisectriu del primer quadrant $y = x$, l'eix d'abscisses i la recta $x = 1$. El segon triangle, *FO.r.*, és determinat per la recta $y = 1 - x$ traçada des de l'extrem (1,0) fins al (0,1) i l'eix d'abscisses. Les tres formes de la segona fila són figures determinades per les ordenades d'una paràbola, l'eix d'abscisses i la recta $x = 1$. La primera, *FO.a².*, determinada per les ordenades $y = x^2$, la segona, *FO.ar.*, per les ordenades $y = x(1 - x)$ i la tercera, *FO.r².*, per les ordenades $y = (1 - x)^2$, i així descriuríem les altres files.

A partir de la taula de les formes, Mengoli va obtenir una segona taula multiplicant els seus elements pels de la taula dels nombres combinatoris, que anomenà *taula de les subquadratures* (*subquadraturarum*). Encara va formar una tercera taula multiplicant cadascuna de les files de la taula de les subquadratures per l'ordre de la fila més 1. Així, la primera fila la va multiplicar per 2, la segona per 3, etc. Aquesta nova taula l'anomenà *taula de les quadratures* (*quadraturarum*).

FO .u.

FO.a. FO.r.

FO.a². FO.2ar. FO.r².

FO.a³ FO.4a²r. FO.4ar². FO.r³.

Tabula subquadraturarum

FO. u.

FO.2a. FO.2r.

FO.3a². FO.6ar. FO.3r².

FO.4a³. FO.12a²r. FO.12ar². FO.4r³.

Tabula quadraturarum

Mengoli estudià aquestes formes pel que fa a monotonia i al punt màxim, i en aquestes demostracions es pot comprovar com Mengoli tenia molt clar el seu dibuix, encara que no el fes. En el primer teorema, demostrà que en les formes del primer costat de la taula (en diagonal), *FO.aⁿ.*, determinades per $y = x^n$, les ordenades eren creixents i que l'ordenada màxima es trobava a l'extrem de la base i valia el mateix que la base, ja que la base era la unitat. També va demostrar que en les formes de l'últim costat, *FO. rⁿ.*, determinades per $y = (1 - x)^n$, les ordenades eren decreixents i que l'ordenada màxima es trobava a l'origen de la base i també valia el mateix que la base. La demostració es basava en la mateixa definició de les ordenades, és a dir, en la proporció $1 : y = (1 : x)^n$. Partia de la desigualtat de les abscisses i obtenia la desigualtat de les ordenades, a través d'aquesta proporció.

En el segon teorema, va demostrar que en les formes del mig, *FO. a^m rⁿ.*, determinades per $y = x^m \cdot (1 - x)^n$, les ordenades eren primer creixents i després decreixents, i prenen el seu valor màxim en una divisió de la base que estava situada a raó $m : n$. La demostració la feia amb la forma *FO. a²r³.*, on l'abscissa B que verificava $AB : BR = 2 : 3$ tenia l'ordenada màxima. Mengoli va demostrar que les ordenades de la figura creixien fins a aquest valor i tornaven a decreixer fins a l'ordenada de R .

Mengoli volia assegurar-se que cadascuna de les expressions de la taula triangular, que eren nous objectes algebraics, podien ser associades a una corba geomètrica. Així, a la tercera proposició, que anomenà *problema*, mostrava com construir l'ordenada de la corba corresponent a la figura geomètrica en un punt donat a partir de la seva expressió algebraica.

Problema 1. Proposició 3. Trobeu l'ordenada d'una forma proposada, per un a punt donat i en una base donada.⁵⁸

58. «Formae propositae, in data basi, per datum punctum, ordinatam invenire» (Mengoli, 1659, p. 377).

Mengoli deia que en una forma o expressió algebraica donada sempre es pot traçar una ordenada, donada una abscissa. Mengoli ho plantejava amb la paraula *problema*, ja que es tractava d'una construcció i no d'un teorema, i el resolvia per a una forma concreta, $FO \cdot 10 a^2 r^3$. El que calia era traçar una recta y , perpendicular a la base, que en un punt donat x verificués la proporció: $(1 : y) = (1 : x)^2 \cdot (1 : (1 - x))^3 (1 : 10)$. Fent la composició de raons, com que eren iguals els numeradors han de ser iguals els denominadors, i li donava el valor de l'ordenada $y = x^2 \cdot (1 - x)^3 \cdot 10$.

Cal remarcar que Mengoli en aquesta demostració no només treballava amb proporcions de segments, sinó que identificava els segments amb les lletres de l'expressió algebraica, encara que ell no va definir una àlgebra de segments com Descartes. Mengoli va establir un cert tipus d'isomorfisme entre els nous objectes algebraics i les figures geomètriques, a fi de poder treballar amb les figures a través de les seves expressions algebraiques.

5.3. Càlcul de les quadratures

Mengoli coneixia el valor d'aquestes quadratures pel mètode dels indivisibles, però mostrà un altre camí per verificar aquests valors. Emprant el llençatge simbòlic de Viète, creà les noves expressions algebraiques que identificà amb les figures geomètriques que volia quadrar. Per fer la demostració, va emprar les taules triangulars i la teoria de quasi proporcions, que havia elaborat en l'«*Elementum tertium*», basant-se en la teoria de proporcions del llibre v dels *Elements* d'Euclides.⁵⁹

Per entendre com Mengoli va aconseguir provar el valor d'aquestes quadratures, considerem les idees bàsiques d'aquesta teoria de «quasi proporcions». Mengoli fonamentà la teoria en la seva noció de «raó quasi un nombre». Per aclarir-la considerarà valors fins a 10 en la raó $O.a$ a t^2 ; per exemple, si $t = 3$, la raó és 3 a 9; si $t = 4$, la raó val 6 a 16, i argumentà que està més a prop de 1/2 que qualsevol altra raó, i anomenà aquesta raó *quasi 1/2*:

[...] per a diferents valors de la lletra t , ordenats sempre en una creixent [seqüència] hi ha diferents [raons] i sempre ordenades de manera creixent [la

seqüència], però sempre més petites que la raó 1/2; efectivament, s'acosten sempre més a prop a la mateixa 1/2. Això és, si la pregunta pogués ser proposada per a algun valor donat, respondria que la raó esdevé més a prop a 1/2 que qualsevol altra raó [donada], [i] serà anomenada la mateixa raó indeterminada $O.a$ a t^2 *quasi 1/2*.⁶⁰

D'aquesta manera, la raó pren diferents valors a mesura que el valor de t augmenta. A més, aquests valors són més a prop de 1/2 que qualsevol altra raó donada. La diferència entre 1/2 i la raó, la qual és determinada quan el valor de t augmenta, és així més petita que la diferència entre 1/2 i qualsevol altra raó donada.⁶¹ El límit d'aquesta successió de raons o d'aquesta raó, en la mesura que és així determinable, és 1/2, i Mengoli denominà el límit *raó quasi 1/2*. La idea de «raó quasi un nombre» suggereix, encara que de manera imprecisa, el concepte modern de límit.⁶²

Aquesta noció, juntament amb la idea de raó indeterminada determinable explicada abans, la va utilitzar per establir les definicions de raó «quasi infinita», «quasi nul·la», «quasi la igualtat» i «quasi un nombre» en l'«*Elementum tertium*»:

1. Una raó indeterminada determinable, que en determinar-se pot ser més gran que qualsevol [raó] donada, en la mesura que es va determinant, es dirà *quasi infinita*.

2. I si pot ser més petita que qualsevol [raó] donada, en la mesura que es va determinant, es dirà *quasi nul·la*.

3. I si pot ser més petita que qualsevol raó més gran que la igualtat, i més gran que qualsevol raó més petita que la igualtat, en la mesura que es va determinant, es dirà *quasi la igualtat*. O bé dit d'una altra manera, que pugui ésser més a prop de la igualtat que qualsevol raó donada que no sigui la igualtat, en la mesura que sigui tal, es dirà *quasi d'igualtat*.

4. I si pot ser més petita que qualsevol raó més gran que una raó proposada, i més gran que qualsevol raó més petita que la mateixa raó proposada, en la mesura que es va determinant, es dirà *quasi igual a aquesta raó*. O bé d'una altra manera, que pugui ésser més a prop de qualsevol raó proposada que qualsevol altra raó que no sigui igual a aquesta, en la mesura que sigui tal, es dirà *quasi igual a la raó proposada*.

59. Mengoli va considerar els *Elements* d'Euclides el llibre de matemàtiques per excel·lència. Trobareu més dades sobre les seves noves teories de quasi proporcions i raons logàritmiques a Massa (1997, 2003).

60. «Pro varijs litterae t valoribus, ordinatim semper maioribus; varias, & semper ordinatim maiores esse: dimidia quidem ratione semper minores; ad ipsam verò dimidiam semper propius accedentes. Quod si propositae quaestione potuerit, pro quodam valore assignabili responderi

ratio propior dimidia, quàm alia quaelibet; dicetur ipsa indeterminata ratio $O.a$ a t^2 , quasi dimidia» (Mengoli, 1659, p. 62).

61. Mengoli considera la raó donada sempre diferent de 1/2.

62. En la seva obra *Circolo* de 1672, Mengoli de nou utilitza quasi raons i explica: «Disi quasi, e volsi dire, che vadino acostandosi ad essere precisamente tali» (Mengoli, 1672, p. 49).

5. I els termes de raons quasi iguals entre si es diran *quasi proporcionals*.

6. I els termes de raons que són quasi d'igualtat es diran *quasi iguals*.⁶³

La definició sisena i última, a la llum de la definició tercera, es podria traduir així:

I els termes de raons que són més properes a la igualtat que qualsevol raó donada diferent de la igualtat, en la mesura que aquestes raons es van determinant, es diran *quasi iguals*.

En calcular les quadratures, Mengoli va emprar aquesta interpretació de la definició de raó de quasi igualtat.

Amb aquestes definicions, va obtenir raons entre tot tipus de sumatoris i el nombre t . Recordem que aquests sumatoris es formen emprant t i que tenen $t - 1$ sumands amb diferents exponents. Va calcular a què tendien aquestes raons quan el nombre de sumands augmenta, i va obtenir moltes quasi raons. Així, en el teorema 42 d'aquest *elementum*, que emprà en les quadratures, partint del teorema 22 i amb aquesta teoria, va demostrar a què tendia aquesta suma quan el nombre de sumands augmenta. En notació actual, Mengoli va demostrar que

$$(m+n+1) \cdot \binom{m+n}{n} \cdot \sum_{a=1}^{a=t-1} a^m \cdot (t-a)^n \text{ tendeix a } t^{m+n+1}$$

quan t tendeix a infinit.

Retornem ara a les corbes que volia quadrar i recordem que estan disposades en una taula triangular, taula de les quadratures (vegeu la figura 6).

$$\begin{aligned} &FO. u. \\ &FO.2a. FO.2r. \\ &FO.3a^2. FO.6ar. FO.3r^2. \\ &FO.4a^3. FO.12a^2r. FO.12ar^2. FO.4r^3. \\ &Tabula quadraturarum \end{aligned}$$

Els coeficients d'aquesta taula de les quadratures són:

$(m+n+1) \cdot \binom{m+n}{n}$, on $(m+n)$ és l'ordre de la fila que, a la vegada, coincideix amb el grau de l'expressió algebraica. Mengoli feia servir l'artifici de multiplicar tots els membres de la taula per $m+n+1$ i pel nombre combinatori corresponent per poder demos-

trar totes les quadratures alhora. Mengoli sabia que el valor d'aquestes quadratures són els inversos d'aquests productes; per tant, posà com a coeficients de les formes que volia quadrar aquests productes i només li quedà per demostrar que les àrees d'aquestes noves formes valien la unitat, és a dir, el quadrat de costat 1.



© Bodleian Library. Oxford University (Oxford).

FIGURA 6. Taules triangulars de quadratures de la *Geometriae*.

Es pot interpretar que Mengoli es va adonar que un dels factors d'aquests productes corresponia als termes del desenvolupament binomial de $[a + (1-a)]^n = [1]^n$, que coneixia molt bé, i que l'altre factor el podia trobar a través de la relació entre la suma de potències i

63. «1. Ratio indeterminata determinabilis, quae in determinari, potest esse maior, quam data, quaelibet, quatenus ita determinabilis, dicitur, *quasi infinita*. 2. Et quae potest esse minor, quam data quaelibet, quatenus ita determinabilis, dicitur, *quasi nulla*. 3. Et quae potest esse minor, quam data quaelibet maior inaequalitas; & maior, quam data quaelibet minor inaequalitas, quatenus ita determinabilis, dicitur, *quasi aequalitas*. Vel aliter, quae potest esse propior aequalitati, quam data quaelibet non aequalitas, quatenus

talís, dicitur, *quasi aequalitas*. 4. Et quae potest esse minor, quam data quaelibet maior, proposita quadam ratione; & maior, quam data quaelibet minor, proposita eadem ratione, quatenus ita determinabilis, dicitur, *quasi eadem ratio*. Vel aliter, quae potest esse propior cuidam propositae rationi, quam data quaelibet alia non eadem, quatenus talís, dicitur, *quasi eadem*. 5. Et rationum quasi earundem inter se, termini dicuntur, *quasi proportionales*. 6. Et quasi aequalitatum, dicuntur, *quasi aequales*» (Mengoli, 1659, p. 97-98).

el grau.⁶⁴ És a dir, que Mengoli era conscient que els nombres pels quals multiplicava cada fila depenien només del grau de l'expressió algebraica de cada fila i dels nombres combinatoris corresponents. Això justificaria que Mengoli digués que la demostració es podia estendre per infinites quadratures. El fet de col·locar les formes en una taula triangular i poder identificar la seva quadratura amb el lloc que ocupa a la taula li donà l'avantatge de poder trobar ràpidament el valor de la seva àrea sense necessitat d'operar. Així, l'àrea de $FO.a^{25}r^{30}$ seria l'invers del seu coeficient, que és el terme 25 del desenvolupament binomial $[a + (1 - a)]^{55}$, combinacions de 55 sobre 30, multiplicat per 56, que és una unitat més que el grau de l'expressió algebraica corresponent. Escrit en notació actual, Mengoli calculava:

$$(m+n+1) \cdot \binom{m+n}{n} \cdot \int_0^1 x^m \cdot (1-x)^n dx = 1$$

Per fer aquesta demostració, Mengoli va establir dues quasi igualtats emprant la teoria de quasi proporcions. D'una banda, va demostrar que la figura que volia quadrar era quasi igual a una figura nova, l'adscrita i, d'altra banda, que aquesta figura adscrita era quasi igual al quadrat de costat 1. Una vegada establertes les dues quasi igualtats, l'una entre l'adscrita i el quadrat, i l'altra entre l'adscrita i la figura que volia quadrar, utilitzà un resultat anterior que deia que establertes dues quasi igualtats amb antecedents iguals, els conseqüents també són iguals. Per tant, totes les quadratures de la taula valien igual que l'àrea del quadrat de costat 1, o sigui, la unitat.

Per establir la primera quasi igualtat, Mengoli emprà les figures inscrita i circumscrita d'Arquimedes, però utilitzà també una figura nova, l'adscrita. La figura inscrita està formada pels paral·lelograms màxims inclosos en la figura, la figura circumscrita pels paral·lelograms mínims que inclouen la figura. En canvi, la figura adscrita està formada pels paral·lelograms construïts sobre les divisions de la base a partir de la primera divisió (o bé sobre l'última) que estan determinats per les ordenades de la figura.

Primer, Mengoli va demostrar que la circumscrita excedeix l'adscrita en una quantitat rectangular determinada per l'ordenada màxima i una de les divisions de la base i, tot seguit, va provar que l'adscrita excedeix la inscrita en una quantitat no més gran que aquesta rectangular. Immediatament, utilitzant la teoria de quasi proporcions, va demostrar que la cir-

cumscripita i la inscrita són quasi iguals, i d'aquí va deduir que la figura que volia quadrar i l'adscrita, que es trobaven entre la circumscrita i la inscrita, també eren quasi iguals.⁶⁵

Aquesta és una demostració a la manera d'Arquimedes, però utilitzant el mètode de les quasi raons en comptes del mètode de doble desigualtat. Una altra diferència amb el mètode d'exhaustió és que en ell s'utilitza directament la figura que es vol quadrar entre la circumscrita i la inscrita. Aquí, en canvi, no s'ha calculat el valor de l'àrea, sinó que s'està a un pas intermedi amb una figura nova: la figura adscrita formada per rectangles finits.

Aquesta figura, l'adscrita, també ens serveix per calcular el valor de l'àrea establint una segona quasi igualtat entre el quadrat de costat 1 i la figura adscrita a l'expressió que es vol quadrar. Aquests rectangles formats en les divisions de la base, que és la unitat, plantegen una raó amb antecedent una potència de t i amb conseqüent la suma de potències. Augmentant el nombre de divisions, aquesta expressió serà de quasi igualtat pel teorema 42. Llavors, la figura adscrita i el quadrat seran quasi iguals.

Un dels punts febles d'aquesta demostració és el pas d'una raó de quasi igualtat entre una suma de potències i potències (nombres) a una raó entre figures geomètriques. Atès que Mengoli havia basat la teoria de quasi proporcions sobre la teoria de proporcions euclidiana, per a ell la nova teoria era vàlida per a qualsevol magnitud, figura o nombre. Cal remarcar que aquesta demostració no depèn del grau i pot ser emprada en tots els casos on la quasi raó de la suma de potències és coneguda.

6. Conclusions

Mengoli, com Viète, va considerar la seva àlgebra com una tècnica en la qual els símbols eren emprats per representar magnituds abstractes. Va tractar amb espècies, formes, taules triangulars, quasi raons i raons logarítmiques. Però l'aspecte més innovador del treball de Mengoli va ser l'ús que va fer de les lletres, la qual cosa li va permetre treballar directament amb l'expressió algebraica de les figures geomètriques. D'una banda, expressava una figura geomètrica amb una expressió algebraica, en la qual l'ordenada de la corba que determinava la figura estava relacionada amb l'abscissa mitjançant una proporció, i va establir així la teoria euclidiana de proporcions com un lligam

64. Mengoli, en la proposició 11 d'aquest element, demostrà que les àrees de les formes de cada fila de la taula de les subquadratures, o sigui, que només tenien com a coeficient el nombre combinatori, eren iguals i valien $1/m + n + 1$. A més, demostrà que la suma de totes les àrees d'aquesta fila donava 1, o sigui, l'àrea del quadrat.

65. Podeu veure el desenvolupament i els càlculs d'aquesta demostració a Massa (1998, p. 129-166) i a Massa (2006, p. 104-108).

entre l'àlgebra i la geometria. D'altra banda, va mostrar com l'expressió algebraica podia emprar-se per construir geomètricament l'ordenada de qualsevol punt. Això li va permetre estudiar les figures geomètriques a través de les seves expressions algebraiques i trobar els valors d'àrees d'una nombrosa classe de corbes a la vegada.

La taula triangular de quadratures que Mengoli va construir en l'«*Elementum sextum*» pot ser estesa indefinidament. De fet, coneixia els valors d'aquestes quadratures i buscava una regla que li permetés associar qualsevol figura geomètrica a una expressió algebraica. Posant aquestes expressions a la taula amb coeficients apropiats, la quadratura de les corbes restava donada. Classificava les figures per les corbes que les determinaven en tres tipus i estudiava les propietats de cada grup, una altra vegada emprant la teoria de proporcions. Quan feia la demostració, aquesta era independent de la representació gràfica de la figura i podia ser emprada en tots els casos on la quasi raó de la suma de potències era coneguda.

Sembla improbable que Mengoli conegués *La géométrie* de Descartes. Les diferències amb l'obra de Mengoli són substancials, tant pel que fa als objectius com als mètodes. Mengoli introduïa l'àlgebra dins la geometria per solucionar problemes de quadratures; Descartes volia solucionar i classificar problemes geomètrics i emprava l'àlgebra com a eina. Mengoli no va fer una àlgebra de segments, com va fer Descartes; és a dir, no va donar una interpretació geomètrica de cadascuna de les operacions algebraiques que definia. A més a més, quan demostrava una identitat algebraica com ara $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, desenvolupava la prova utilitzant les propietats de les proporcions. La seva introducció de l'àlgebra dins la geometria té més similituds amb els procediments de Viète. Aquest també emprava la teoria de proporcions com un lligam, però feia diagrames sense emprar sistemes de coordenades i verificava les construccions de les solucions de les equacions de segon grau sense assumir cap connexió entre les ordenades i les abscisses.

Quan es menciona la relació entre les ordenades i les abscisses en una corba, hom pensa immediatament en Fermat i en la seva obra *Ad locos planos et solidos isagoge* de 1636. Tot i que Mengoli podria haver pres la inspiració en l'obra de Fermat, Mengoli només va establir la relació per a certes corbes, tals com $y = K \cdot x^m \cdot (1 - x)^n$, i no va mencionar haver trobat un principi general com va dir Fermat en la seva *Isagoge* (1891-1922, I, p. 91). Mengoli no va tractar ni problemes sòlids, ni llocs geomètrics, com va fer Fermat; a més, el seu mètode algebraic no pot ser aplicat per solucionar aquests altres problemes geomètrics.

Encara que el seu mètode era innovador, és una realitat que molts matemàtics de l'època no se'l van llegir a causa de la seva manera d'escriure enrevessa-

da i poc clara. Mengoli realment va fer una aplicació molt rigorosa del llenguatge algebraic, sobretot en l'aspecte formal, la qual cosa li va comportar una complicació molt gran pel que fa a símbols i escriptura, i que va en augment a mesura que avança en la seva obra. Però si en la seva època la utilització del llenguatge algebraic va ser un entrebanc per a la seva difusió, és precisament aquesta característica peculiar la que actualment el fa més interessant. Mengoli va introduir l'àlgebra dins la geometria per un camí diferent a les tendències del moment, però les seves aportacions constitueixen un esglau més per entendre aquest procés d'algebrització de les matemàtiques que s'estava desenvolupant en el segle XVII. El seu objectiu prioritari no va ser ni la construcció algebraica de les corbes, ni la seva classificació, sinó resoldre unes quadratures que ja coneixia mitjançant un mètode diferent en el qual desenvolupava l'àlgebra de Viète. No hauríem d'oblidar que Mengoli desitjava quadrar el cercle interpolant aquestes taules de quadratures. Aquesta recerca va aparèixer més tard en la seva obra *Circolo* (1672), en la qual va estudiar quadratures de corbes determinades per equacions avui dia representades per $y^p = K \cdot x^m \cdot (1 - x)^n$. Mengoli emfasitzava que aquestes quadratures mai no havien estat trobades abans. De fet, qualsevol intent per calcular aquestes quadratures geomètricament hauria de fer-se cas per cas.

L'estudi de l'obra de Mengoli revela que la seva base no era el mètode dels indivisibles del seu mestre Cavalieri, sinó el triangle aritmètic i la teoria de quasi proporcions com a desenvolupament de l'àlgebra de Viète. En aquest sentit, va elaborar una teoria numèrica de sumes de potències i productes de potències i límits d'aquestes sumes que no tenien res a veure amb les *omnes lineae* de Cavalieri. No és clara la raó per la qual Mengoli no va seguir el camí del seu mestre. Potser fou pel fet que el mètode de Cavalieri havia rebut moltes crítiques i Mengoli no podia deixar de ser-hi sensible. Després de mostrar que coneixia el mètode dels indivisibles i que podia aplicar-lo, Mengoli deia que volia buscar nous mètodes, amb fonaments més sòlids, introduint en els seus càlculs l'àlgebra de Viète a través de les taules triangulars i la teoria de les quasi proporcions. Segurament perquè desitjava allunyar-se del mètode dels indivisibles i de les seves crítiques, Mengoli va moure's cap a aquest llenguatge algebraic nou. En aquest sentit, podem dir que era «modern». Però Mengoli era clàssic en la seva forma de presentar l'obra i en el seu pensament, ja que un dels seus grans pilars van ser els *Elements* d'Euclides. La teoria de proporcions euclidiana va ser una de les bases de la seva matemàtica. Amb la teoria de proporcions va construir la teoria de quasi proporcions que, tanmateix, mostra un Mengoli innovador, ja que treballà amb l'infinít, comparà infinits de diferent ordre i demostrà nombroses quasi proporcions. Seguint una

investigació molt original, Mengoli «va conjuntar perfectament» en la seva obra la matemàtica clàssica —representada en aquest cas per Euclides (teoria de proporcions), Arquimedes (mètode d'exhaustió) i el mètode dels indivisibles del seu mestre Cavalieri— i

la matemàtica innovadora en aquell moment —representada per l'àlgebra de Viète. Les característiques del pensament algebraic i geomètric en les investigacions de Mengoli es van complementar per aconseguir nous i millors resultats.

Bibliografia

- ANDERSEN, K. (1984/1985). «Cavalieri's method of indivisibles». *Archive for the History of Exact Sciences*, núm. 31, p. 291-367.
- ANGELI, S. D. (1659). *Miscellaneum hyperbolicum*. Bolonya.
- AUGER, L. (1962). *Un savant méconnu: Gilles Personne de Roberval (1602-1675)*. París: Blanchard.
- BARON, M. E. (1987). *The origins of the infinitesimal calculus*. Nova York: Dover.
- BARONCINI, G.; CAVAZZA, M. (1986). *La corrispondenza di Pietro Mengoli*. Florència: Olschki.
- BERNOULLI, J. (1975). *Werke*. Basel: Birkhäuser Verlag. 3 v.
- BOMBELLI, R. (1966). *L'algebra*. Milà: Giangiacomo Feltrinelli Editore. [Editat per E. Bortolotti]
- BOS, H. J. M. (1981). «On the representation of curves in Descartes' *Géométrie*». *Archive for the History of Exact Sciences*, núm. 24, p. 295-338.
- (1998). «La structure de la *Géométrie* de Descartes». *Revue d'Histoire des Sciences*, núm. 51, p. 291-317.
- (2001). *Redefining geometrical exactness: Descartes' transformation of the early modern concept of construction*. Nova York: Springer-Verlag.
- BOSMANS, H. (1924). «Sur l'oeuvre mathématique de Blaise Pascal». *Mathesis*, núm. 38, supl., p. 1-59.
- BOYER, C. B. (1943). «Pascal's formula for the sums of powers of the integers». *Scripta Mathematica*, núm. 9, p. 237-244.
- CAJORI, F. (1928). *A history of mathematical notations*. Vol. 1. Chicago: Open Court.
- CAVALIERI, B. (1635). *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*. Bolonya.
- (1647). *Exercitationes geometricae sex*. Bolonya.
- CAVAZZA, M. (1980). «Bologna and the Royal Society in the seventeenth-century». *Notes and Records of the Royal Society of London*. Vol. 35, núm. 2, p. 105-123.
- (1979/1980). «L'oscurità di Pietro Mengoli e i suoi difficili rapporti con i contemporanei». *Atti della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Cl. Di Scienze Morale*. Memòria LXXVII, p. 57-78.
- CIFOLETTI C. (1990). «La méthode de Fermat: son statut et sa diffusion». *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences* [París: Société Française d'Histoire des Sciences et des Techniques], sèrie nova, núm. 33.
- CLAGETT, M. (1968). *Nicole Oresme and the medieval geometry of qualities and motion*. Madison: Wisconsin.
- CROMBIE, A. C. (1980). *Historia de la ciencia: de San Agustín a Galileo, siglos XIII-XVII*. Vol. 2. 3a ed. Madrid: Alianza Universidad.
- DESCARTES, R. (1954). *The geometry of René Descartes*. Nova York: Dover. [Edició anglesa de D. E. Smith i M. L. Latham]
- EUCLIDES (1956). *The elements*. Vol. 3. Nova York: Dover. [Edició anglesa de T. L. Heath]
- FERMAT, P. (1891-1922). *Oeuvres* [i supplements]. París: Gauthier-Villars. 4 v. [Edició francesa de P. Tannery i H. Charles]
- FREGUGLIA, P. (1999). *La geometria fra tradizione e innovazione: Temi e metodi geometrici nell'età della rivoluzione scientifica 1550-1650*. Torí: Bollati Boringhieri.
- GIUSTI, E. (1980). *Bonaventura Cavalieri and the Theory of Indivisibles*. Bolonya: Edizioni Cremonese.
- (1987). «La *Géométrie* di Descartes tra numeri e grandezze». *Giornale Critico della Filosofia Italiana*, núm. 66, p. 409-432.

- (1992). «Algebra and geometry in Bombelli and Viète». *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, núm. 12, p. 303-328.
- GREGORY, J. (1939). *James Gregory tercentenary memorial volume*. Londres: Bell. [Editat per H. W. Turnbull]
- HÉRIGONE, P. (1644). *Cursus mathematicus, nova, brevi et clara methodo demonstratus, Per NOTES reales & universales, citra usum cuiuscumque idiomatis, intellectu faciles*. París: Simon Piget.
- HØYRUP, J. (1996). «A new art in ancient clothes. Itineraries chosen between scholasticism and baroque in order to make *algebra* appear legitimate, and their impact on the substance of the discipline». *Filosofi og Videnskabsteori pa Roskilde Universitetscenter* [Raekke: Preprints of Reprints], núm. 3.
- LEIBNIZ, G. W. (1990). *Mathematische schriften*. Vol. 1. Berlín: Akademie-Verlag, núm. 37, 39, 40 i 75. [Edició alemanya d'E. Knobloch i W. S. Contro]
- LINDBERG, D. C. [ed.]. (1978). *Science in the middle ages*. Chicago: The University of Chicago Press.
- MAHONEY, M. S. (1971-1991). «Pierre de Fermat». A: GILLISPIE, C. C. [ed.]. *Dictionary of scientific biography*. Nova York: Scribner's, p. 566-576.
- (1973). *The mathematical career of Pierre de Fermat*. Princeton: Princeton University Press.
- (1980). «The beginnings of algebraic thought in the seventeenth century». A: GAUKROGER, S. [ed.]. *Descartes' philosophy, mathematics and physics*. Brighton: Totowa, Barnes and Noble: Harvester, p. 141-156.
- MALET, A. (1996). *From indivisibles to infinitesimals, studies on seventeenth century mathematicalizations of infinitely small quantities*. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona.
- MALET, A.; PARADÍS, J. (1984). *Els orígens i l'ensenyament de l'àlgebra simbòlica*. Barcelona: Universitat de Barcelona.
- MANCOSU, P. (1996). *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century*. Oxford: Oxford University Press.
- MASSA, M. R. (1994). «El mètode dels indivisibles de Bonaventura Cavalieri». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, núm. 9, p. 68-100.
- (1997). «Mengoli on "quasi proportions"». *Historia Mathematica*. Vol. 24, p. 257-280.
- (1998). *Estudis matemàtics de Pietro Mengoli (1625-1686): taules triangulars i quasi proporcions com a desenvolupament de l'àlgebra de Viète*. Barcelona: Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona. [Tesi doctoral]
- (2001). «Las relaciones entre el álgebra y la geometría en el siglo xvii». *Llull*, núm. 24, p. 705-725.
- (2003). «La théorie euclidienne des proportions dans les *Geometriae speciosae elementa* (1659 de Pietro Mengoli)». *Revue d'Histoire des Sciences*. Vol. 56, núm. 2, p. 457-474.
- (2006). «Algebra and geometry in Pietro Mengoli (1625-1686)». *Historia Mathematica*. Vol. 33, p. 82-112.
- «La algebrización de las matemáticas. L'*algèbre* de Pierre Hérigone (1580-1643)». *Actas del IX Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y las Técnicas*. Cadis. [En premsa]
- MENGOLI, P. (1655). *Via regia ad mathematicas per arithmetica, algebra speciosam and planimetriam, ornata maiestati serenissimae D. Christinae reginae suecorum*. Bolonya.
- (1659). *Geometriae speciosae elementa*. Bolonya.
- (1672). *Circolo*. Bolonya.
- (1673). *Anno*. Bolonya.
- NASTASI-SCIMONE. (1994). «Pietro Mengoli and the six-square problem». *Historia mathematica*. Vol. 21, p. 10-27.
- NATUCCI, A. (1970-1991). «Mengoli». A: GILLISPIE, C. C. [ed.]. *Dictionary of scientific biography*. Vol. 9. Nova York: Scribner's, p. 303-304.
- OLDENBURG, H. (1986). *The correspondence of Henry Oldenburg*. Madison: University of Wisconsin Press. 13 v. [Editat per Rupert Hall i Marie Boss Hall]
- PANZA, M. (2005). *Newton et les origines de l'analyse: 1664-1666*. París: Blanchard.
- PASCAL, B. (1954). *Oeuvres complètes*. París: Gallimard.
- PEPE, L. (1981). «Il calcolo infinitesimale in Italia agli inizi del secolo xvii». *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*. Vol. 1, núm. 2, p. 43-101.
- (1982). «Note sulla diffusione della *Géométrie* di Descartes in Italia nel secolo xvii». *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*. Vol. II, fasc. 2, p. 249-288.
- PYCIOR, H. M. (1997). *Symbols, impossible numbers, and geometric entanglements: british algebra through the commentaries on Newton's universal arithmetik*. Cambridge: Cambridge University Press.
- RIGAUD, S. P. (1841). *Correspondence of scientific men of the seventeenth century*. Vol. 2. Oxford. [Nova edició per Hildesheim: Olms, 1965]
- ROBINET, A. (1988). *G. W. Leibniz. Iter italicum*. Florència: Olschki.
- SCOTT, J. F. (1981). *The mathematical work of John Wallis, D. D. FRS. (1616-1703)*. Nova York: Chelsea.
- TABARRONI, G. (1971-1991). «Geminiano Montanari». A: GILLISPIE, C. C. [ed.]. *Dictionary of scientific biography*. Vol. 9. Nova York: Scribner's, p. 485-487.
- TORRICELLI, E. (1919). *Opere*. Faenza. 3 v. [Editat per G. LORIA i G. VASSURA]

- VACCA, G. (1915). «Sulle scoperte di Pietro Mengoli». *Atti dell'Accademia Nazionale del Lincei-Rendiconti*. Vol. XXIV, núm. 5, p. 508-513, 617-620.
- VIÈTE, F. (1970). *Opera mathematica*. Nova York: Georg Olms Verlag. [Editat per F. A. Schooten]
- WALKER, E. (1986). *A study of the traité des indivisibles of... Roberval*. Nova York: Columbia Univ. Press.
- WALLIS, J. (1972). *Opera mathematica*. Vol. 1: *Arithmetica infinitorum*. Nova York: Georg Olms Verlag. [Editat per F. A. Schooten]

M. Rosa Massa Esteve (Palamós, 1954) va estudiar la carrera de matemàtiques a la Universitat de Barcelona (1972-1977). A partir del curs 1977-1978, va començar la seva activitat laboral com a professora agregada de matemàtiques, primer interinament a l'IB Jaume Balmes i després de l'oposició lliure del 1978 va esdevenir professora agregada d'instituts d'ensenyança mitjana fins al curs 1992-1993. A partir del 1993, per concurs de mèrits, esdevé catedràtica de secundària de matemàtiques. Actualment és professora lectora del Departament de Matemàtica Aplicada I de la Universitat Politècnica de Catalunya, i compagina la docència en matemàtiques i en història de la ciència amb les activitats de recerca. És membre del Grup de Recerca d'Història de la Ciència i de la Tècnica (GRHCT) de la Universitat Politècnica de Catalunya, on pertany al Centre de Recerca per a la Història de la Tècnica.

Va començar els estudis de doctorat en història de la ciència el curs 1989-1990 al Centre d'Estudis d'Història de les Ciències (CEHIC) de la Universitat Autònoma de Barcelona. El 1993 va concloure el mestratge d'història de la ciència amb la presentació d'una memòria de recerca titulada *Contribució de Pietro Mengoli al concepte de límit a través d'una teoria de les quasi proporcions*, dirigida pel doctor Antoni Malet.

Es va doctorar el 1998 amb la tesi *Estudis matemàtics de Pietro Mengoli (1625-1686): taules triangulars i quasi proporcions com a desenvolupament de l'àlgebra de Viète*, dirigida pel doctor Antoni Malet i pel doctor Albert Dou, i defensada el 26 de juny a la Facultat de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Pel que fa a la seva docència en història de la ciència, ha estat professora de cursos de doctorat al CEHIC de la Universitat Autònoma de Barcelona, formadora d'història de la ciència de professors de matemàtiques de l'Institut de Ciències de l'Educació (ICE) de la Universitat Autònoma de Barcelona, de l'ICE de la Universitat de Barcelona i de la Unitat de Formació de Formadors de la Universitat Politècnica de Catalunya des de l'any 1999.

Pel que fa a la recerca, treballa en dues línies, l'una referida a l'algebrització de les matemàtiques del segle XVII i l'altra a les relacions entre la història i l'ensenyament de les matemàtiques. Dins d'aquesta última línia, és la coordinadora del Grup de Treball d'Història de les Matemàtiques amb un projecte subvencionat per l'ICE de la Universitat de Barcelona sobre la història de la trigonometria i el seu ensenyament. També, a través de la Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica, ha format part del comitè organitzador de les I i II Jornades sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament que tingueren lloc a Barcelona l'any 2003 i 2005, respectivament. Recentment, ha començat a treballar en un nou projecte sobre l'Acadèmia Militar de Matemàtiques de Barcelona del segle XVIII i la seva influència sobre la cultura científica i tècnica catalana i espanyola.

Bona part de les seves recerques han estat publicades en les actes de les Trobades de la Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica. Cal destacar també les seves contribucions a diverses revistes internacionals, com ara *Historia Mathematica*, *Revue d'Histoire des Sciences*, espanyoles, com ara *Llull*, o bé catalanes, com ara *Ictineu*, *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques* i *Biaix*.

COELOQUIS D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA

Títols publicats

- 1 Antoni QUINTANA, *Aportació dels primers aeronautes al coneixement de la química de l'aire a les darreries del segle XVIII: Reconstrucció i valoració de les ascensions de l'italià Vincenzo Lunardi a Madrid el 12 d'agost de 1792 i el 8 de gener de 1793* (1996)
- 2 Geoffrey E. R. LLOYD, *Explorant la ciència antiga* (2001)
- 3 Arnaldi de Villanova *opera medica omnia: 1975-2000: 25 anys d'un projecte internacional* (2001) [Exhaurit]
- 4 Francesc X. BARCA, *Onofre Jaume Novellas i Alavau (Torelló, 1787 - Barcelona, 1849): Matemàtiques i astronomia durant la revolució liberal* (2005)



**SOCIETAT CATALANA D'HISTÒRIA
DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA**

Filial de l'Institut d'Estudis Catalans

IECentanys19072007